

DOI: 10.32347/2076-815x.2026.91.483-500

УДК 624.04

д.т.н., професор Сур'янінов М.Г.,

sng@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221,

д.т.н., професор Крутий Ю.С.,

yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087,

к.т.н., доцент Перпері А.О.,

a.perperi@odaba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-7112-6864,

Клименко О.М.,

bolshajaakula@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7445-6057,

Одеська державна академія будівництва та архітектури

АНАЛІТИЧНИЙ РОЗРАХУНОК КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН З ВІЛЬНИМИ ВІД ЗАКРІПЛЕНЬ КОНТУРАМИ

Запропоновано аналітичний метод розрахунку на згин кільцевих пластин з вільними від закріплень контурами на неоднорідній пружній основі Вінклера, коли коефіцієнт постелі та навантаження задані довільними неперервними функціями. У моделі Вінклера пружна основа, на яку опирається пластина, представляється у вигляді набору вертикальних, близько розташованих, не пов'язаних між собою пружин. Таку модель можна описати єдиним коефіцієнтом постелі. У найпростішому випадку, коли пружна основа вважається однорідною, коефіцієнт постелі є сталим, що значно спрощує розв'язання відповідних диференціальних рівнянь. Цим можна пояснити широко вживане припущення про однорідність основи. Однак таке припущення є досить приблизним, і для більш точних досліджень необхідно враховувати неоднорідність основи. Дана робота є продовженням досліджень авторів, присвячених симетричному згину кільцевих пластин на неоднорідній пружній основі. Дослідження ґрунтуються на точному розв'язку диференціального рівняння симетричного згину круглих та кільцевих пластин, яке знайдено методом прямого інтегрування. Для розробки методу чисельної реалізації точного розв'язку застосовується класична теорія функціональних рядів. Для верифікації результатів розрахунку, отриманих авторським методом, використовується метод скінченних елементів, реалізований в програмному комплексі ЛРА. Оскільки авторський метод ґрунтується на точному розв'язку диференціального рівняння, отримані тут чисельні результати можна трактувати, як точні. Порівняння розрахунків авторським методом з розрахунками у комплексі ЛРА підтверджує валідність запропонованого методу. Встановлено, що найбільша похибка методу скінченних елементів виникає в околицях точок, де функції внутрішніх зусиль змінюють знак.

Ключові слова: кільцева пластина, модель Вінклера, точний розв'язок, теорія функціональних рядів, метод скінченних елементів, ЛПР.

Вступ. Конструкції у вигляді кільцевих пластин на суцільній пружній основі часто застосовуються в промисловому та цивільному будівництві, в залізничній галузі, гідротехніці, ораблебудуванні, аерокосмічній техніці та інших галузях промисловості.

Існують різні моделі пружної основи, найбільш широкого поширення набула модель Вінклера. Тут модель пружної основи, на яку опирається пластина, представляється у вигляді набору вертикальних, близько розташованих, не пов'язаних між собою пружин. Таку модель можна описати єдиним параметром, який називають модулем пружності основи чи коефіцієнтом постелі. У найпростішому випадку, коли пружна основа вважається однорідною, коефіцієнт постелі є сталим, що значно спрощує розв'язання відповідних диференціальних рівнянь. Цим можна пояснити широко вживане припущення про однорідність основи. Однак таке припущення є досить приблизним, і для більш точних досліджень необхідно враховувати неоднорідність основи [1]. Зрозуміло, що в такому разі коефіцієнт постелі буде змінною величиною. Один з таких випадків розглядається в публікаціях авторів [2-4], де серед інших наведено розрахунки кільцевих пластин з різними граничними умовами та лінійно-змінним коефіцієнтом постелі. Дана робота є продовженням досліджень авторів [2-9], присвячених симетричному згину кільцевих пластин на неоднорідній пружній основі.

Аналіз попередніх досліджень. Детальний огляд робіт, присвячених дослідженню згину круглих та кільцевих пластин на змінній пружній основі, надано в [1]. Після ретельного аналізу автори [1] констатують, що пошук аналітичних розв'язків є актуальним.

На доповнення до публікацій [10-12], результати яких були проаналізовані в [2], також заслуговують бути відміченими роботи [13-15]. В дослідженні [13] авторами запропоновано новий аналітичний метод оцінки деформацій та напружень для суцільних та кільцевих пластин змінної товщини при симетричному згині. Показано, що чисельні розрахунки, отримані запропонованим методом для окремих випадків, співпадають з раніше відомими результатами. Публікація [14] присвячена статичному аналізу функціонально-градієнтних круглих пластин, що опираються лінійно-пружну основу з різними граничними умовами. Механічні властивості матеріалу тут задаються експоненціальним законом в напрямку товщини, а коефіцієнт Пуассона залишається сталим. Досліджено залежність деформацій та напружень в пластині від властивостей матеріалу, коефіцієнтів пружної основи,

геометричних параметрів та граничних умов. В роботі [15] також досліджуються функціонально-градієнтні пластини на лінійно-пружній основі. Тут механічні властивості матеріалу можуть змінюватись за законом експоненти не лише по товщині, а й у напрямку радіусу. На чисельних прикладах вивчено вплив геометричних характеристик, жорсткості фундаменту та граничних умов на статичну поведінку пластин.

Як показує аналіз публікацій, розробка нових аналітичних методів розрахунку на згин кільцевих пластин, що опираються на неоднорідну пружну основу, є актуальною.

Мета. Метою роботи є розробка аналітичного методу розрахунку на згин кільцевих пластин на неоднорідній пружній основі Вінклера, коли коефіцієнт постелі та навантаження задані довільними неперервними функціями.

Матеріали та методи дослідження. Дослідження ґрунтуються на точному розв'язку диференціального рівняння симетричного згину круглих та кільцевих пластин, яке знайдено методом прямого інтегрування в публікації [16]. Для розробки методу чисельної реалізації точного розв'язку застосовується класична теорія функціональних рядів. Для верифікації результатів розрахунку, отриманих авторським методом, використовується метод скінченних елементів, реалізований в програмному комплексі ЛПРА.

Результати та обговорення.

Об'єкт дослідження та формули для параметрів напружено-деформованого стану пластини

Об'єктом дослідження являється кільцева пластина сталого циліндричної жорсткості D , що опирається на суцільну неоднорідну пружну основу та знаходиться під впливом неперервно-розподіленого поперечного навантаження $q(r)$ (рис. 1).

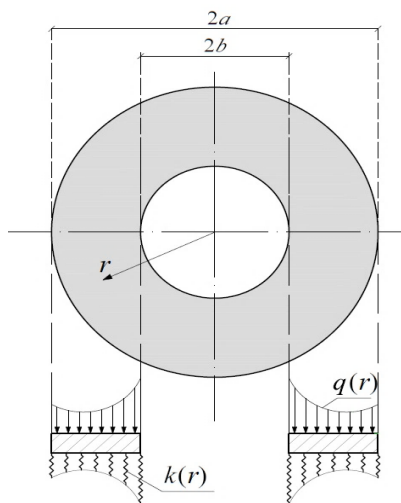


Рис. 1. Кільцева пластина на змінній пружній основі

Симетричний згин пластини виникає, коли діюче навантаження $q(r)$, реакція пружної основи $R(r)$ та умови закріплення країв не залежать від полярного кута θ . При такому згині в пластині діють тільки три внутрішні зусилля, а саме: радіальний M_r і окружний M_θ згинальні моменти, а також радіальна поперечна сила Q_r (рис. 2). Крутний момент $M_{r\theta}$ і окружна поперечна сила Q_θ дорівнюють нулю в силу осової симетрії напружено-деформованого стану пластини.

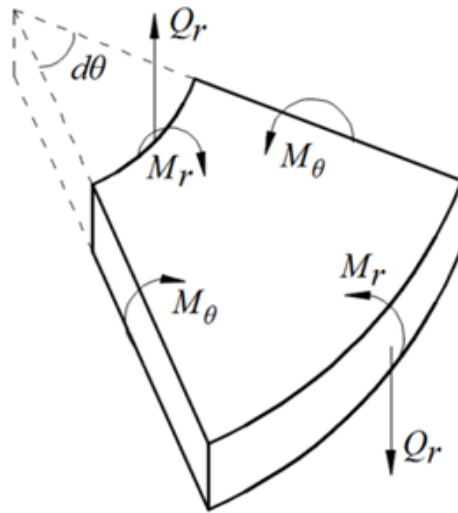


Рис. 2. Згинальні моменти та поперечна сила в пластині

Для пружної основи прийнято гіпотезу Вінклера, відповідно до якої, сила реакції $R(r)$ основи на пластину та прогин $w(r)$ пов'язані між собою рівністю $R(r) = -k(r)w(r)$, де $k(r)$ – змінний коефіцієнт постелі (рис. 1), який являє собою неперервну функцію від радіальної координати.

Для коефіцієнта постелі $k(r)$ приймаємо форму запису $k(r) = k_0 A(r)$, де k_0 – значення коефіцієнта постелі в деякій характерній точці пластини, наприклад, на внутрішньому контурі $r = b$; $A(r)$ – безрозмірна неперервна функція, що виражає закон зміни коефіцієнта постелі від радіальної координати.

Аналогічне подання приймаємо і для заданого навантаження $q(r) = q_0 B(r)$, де q_0 – навантаження в деякій характерній точці пластини; $B(r)$ – безрозмірна неперервна функція, яка задає закон зміни навантаження від радіальної координати.

Диференціальне рівняння симетричного згину пластини матиме вигляд

$$D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw}{dr} \right) \right] \right\} + k_0 A(r) w = q_0 B(r). \quad (1)$$

В публікації [11] отримані точні формули для параметрів напружено-деформованого стану, а саме, формули для функції прогинів $w(r)$ та внутрішніх зусиль M_r, M_θ, Q_r .

Точний розв'язок рівняння (1) визначається формулами:

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (2)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 Y_1(r) + \lambda_4 Y_2(r) + X_3(r),$$

де $\lambda_n (n=1,2,3,4)$ – безрозмірні константи інтегрування; $X_n(r), Y_n(r) (n=1,2)$ – безрозмірні фундаментальні функції відповідного однорідного диференціального рівняння, тобто рівняння (1) при нульовій правій частині; $X_3(r)$ – безрозмірна функція, яка пов'язана з частинним розв'язком $X_*(r)$ неоднорідного рівняння (1) формулою

$$X_*(r) = \frac{q_0 a^4}{D} X_3(r).$$

Важливо зауважити, що для фундаментальних функцій $Y_n(r) (n=1,2)$ має місце подання [11]

$$Y_n(r) = X_n(r) \ln \frac{r}{a} + Z_n(r) \quad (n=1,2). \quad (3)$$

Функції $X_n(r) (n=1,2,3)$ та $Z_n(r) (n=1,2)$ визначаються наступними рівномірно збіжними рядами, записаними по степеням безрозмірного параметру $K = k_0 a^4 / D$:

$$X_n(r) = \alpha_{n,0}(r) - K \alpha_{n,1}(r) + K^2 \alpha_{n,2}(r) - K^3 \alpha_{n,3}(r) + \dots \quad (n=1,2,3); \quad (4)$$

$$\alpha_{n,0}(r) = \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} \quad (n=1,2); \quad (5)$$

$$\alpha_{3,0}(r) = \frac{1}{a^4} \int_0^r \int_0^r \int_0^r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r B(r) dr dr dr dr; \quad (6)$$

$$\alpha_{n,k}(r) = \frac{1}{a^4} \int_0^r \int_0^r \int_0^r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r A(r) \alpha_{n,k-1}(r) dr dr dr dr \quad (n=1,2,3) (k=1,2,3,\dots); \quad (7)$$

$$Z_n(r) = \beta_{n,0}(r) - K \beta_{n,1}(r) + K^2 \beta_{n,2}(r) - K^3 \beta_{n,3}(r) + \dots \quad (n=1,2); \quad (8)$$

$$\beta_{n,0}(r) = \left(\frac{r}{a} \right)^{2n-2} \quad (n=1,2); \quad (9)$$

$$\beta_{n,k}(r) = \frac{1}{a^4} \int_0^r \int_0^r \int_0^r \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r r \left(A(r) \beta_{n,k-1}(r) - \frac{4a^4}{r} \frac{d^3 \alpha_{n,k}(r)}{dr^3} \right) dr dr dr dr \quad (10)$$

$$(n=1,2) (k=1,2,3,\dots).$$

Як видно, формули (7) та (10) є рекурентними. За допомогою цих формул, знаючи початкові функції $\alpha_{n,0}(r)$ ($n=1,2,3$) та $\beta_{n,0}(r)$ ($n=1,2$), можна послідовно знаходити відповідні функції $\alpha_{n,k}(r)$ ($n=1,2,3$) ($k=1,2,3,\dots$) та $\beta_{n,k}(r)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$), які прийнято називати твірними [11].

Для внутрішніх зусиль мають місце формули:

$$M_r = -q_0 a^2 \left(\widehat{W}(r) + \mu \frac{a}{r} \widetilde{W}(r) \right); \quad (11)$$

$$M_\theta = -q_0 a^2 \left(\mu \widehat{W}(r) + \frac{a}{r} \widetilde{W}(r) \right); \quad (12)$$

$$\widetilde{W}(r) = \lambda_1 \widetilde{X}_1(r) + \lambda_2 \widetilde{X}_2(r) + \lambda_3 \widetilde{Y}_1(r) + \lambda_4 \widetilde{Y}_2(r) + \widetilde{X}_3(r); \quad (13)$$

$$\widehat{W}(r) = \lambda_1 \widehat{X}_1(r) + \lambda_2 \widehat{X}_2(r) + \lambda_3 \widehat{Y}_1(r) + \lambda_4 \widehat{Y}_2(r) + \widehat{X}_3(r); \quad (14)$$

$$Q_r = -q_0 a \left(\widehat{W}(r) + \frac{a}{r} \widehat{W}(r) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 \widetilde{W}(r) \right); \quad (15)$$

$$\widehat{W}(r) = \lambda_1 \widehat{X}_1(r) + \lambda_2 \widehat{X}_2(r) + \lambda_3 \widehat{Y}_1(r) + \lambda_4 \widehat{Y}_2(r) + \widehat{X}_3(r). \quad (16)$$

Тут через $\widetilde{X}_n(r)$, $\widehat{X}_n(r)$, $\widehat{X}_n(r)$ позначено три перших безрозмірних похідні від функцій $X_n(r)$, тобто

$$\widetilde{X}_n(r) = a \frac{dX_n(r)}{dr}, \quad \widehat{X}_n(r) = a^2 \frac{d^2 X_n(r)}{dr^2}, \quad \widehat{X}_n(r) = a^3 \frac{d^3 X_n(r)}{dr^3} \quad (n=1,2,3), \quad (17)$$

а через $\widetilde{Y}_n(r)$, $\widehat{Y}_n(r)$, $\widehat{Y}_n(r)$ – три перших безрозмірних похідні від функцій $Y_n(r)$, тобто

$$\widetilde{Y}_n(r) = a \frac{dY_n(r)}{dr}, \quad \widehat{Y}_n(r) = a^2 \frac{d^2 Y_n(r)}{dr^2}, \quad \widehat{Y}_n(r) = a^3 \frac{d^3 Y_n(r)}{dr^3} \quad (n=1,2). \quad (18)$$

Зважаючи на (10), для безрозмірних похідних (18) також визначені наступні подання [11]:

$$\widetilde{Y}_n(r) = \widetilde{X}_n(r) \ln \frac{r}{a} + \frac{a}{r} X_n(r) + \widetilde{Z}_n(r); \quad (19)$$

$$\widehat{Y}_n(r) = \widehat{X}_n(r) \ln \frac{r}{a} + 2 \frac{a}{r} \widetilde{X}_n(r) - \left(\frac{a}{r} \right)^2 X_n(r) + \widehat{Z}_n(r); \quad (20)$$

$$\widehat{Y}_n(r) = \widehat{X}_n(r) \ln \frac{r}{a} + 3 \frac{a}{r} \widehat{X}_n(r) - 3 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \widetilde{X}_n(r) + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 X_n(r) + \widehat{Z}_n(r), \quad (21)$$

де

$$\widetilde{Z}_n(r) = a \frac{dZ_n(r)}{dr}, \quad \widehat{Z}_n(r) = a^2 \frac{d^2 Z_n(r)}{dr^2}, \quad \widehat{Z}_n(r) = a^3 \frac{d^3 Z_n(r)}{dr^3} \quad (n=1,2) \quad (22)$$

– безрозмірні похідні функцій $Z_n(r)$.

Формулами (19)-(22) повністю визначається розв'язок задачі про симетричний згин круглих та кільцевих пластин, що лежать на суцільній неоднорідній пружній основі Вінклера. Однак при реалізації даних формул на практиці можуть виникати труднощі, пов'язані в першу чергу з необхідністю обчислення інтегральних виразів (2), (5), якими визначено твірні функції. Тому постає актуальне питання про ефективний спосіб обчислення вказаних інтегральних виразів. В публікації [11] було отримано аналітичні формули для обчислення інтегральних виразів (2), (5) для випадку, коли коефіцієнт постелі та змінне навантаження задаються довільними поліномами. Однак в науковій літературі при завданні законів зміни навантаження та коефіцієнту постелі не обмежуються лише поліномами. Тому в даній роботі ставиться завдання отримати більш узагальнені аналітичні формули для обчислення інтегральних виразів (2), (5), які можна буде використовувати у випадку будь-яких неперервних функцій $A(r)$ та $B(r)$. При цьому будемо виходити з подання вказаних функцій у вигляді степеневих рядів Маклорена.

Подання твірних функцій степеневими рядами

Розкладемо безрозмірні функції $A(r)$ та $B(r)$ в ряди по степеням безрозмірної радіальної координати r/a :

$$A(r) = A_0 + A_1 \left(\frac{r}{a}\right) + A_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + A_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \dots ; \quad (23)$$

$$B(r) = B_0 + B_1 \left(\frac{r}{a}\right) + B_2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 + B_3 \left(\frac{r}{a}\right)^3 + \dots . \quad (24)$$

У загальному випадку безрозмірні коефіцієнти даних рядів визначаються за формулами

$$A_0 = A(0), \quad A_j = \frac{a^j A^{(j)}(0)}{j!}, \quad B_0 = B(0), \quad B_j = \frac{a^j B^{(j)}(0)}{j!} \quad (25)$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots),$$

де індекс (j) означає порядок похідної. Однак часто для визначення вказаних коефіцієнтів зручніше користуватись не загальними формулами, а виходячи з відомих рядів Маклорена для тих чи інших елементарних функцій. Найпростіша ситуація виникає тоді, коли одна чи обидві з функцій $A(r)$, $B(r)$ задаються поліномами. В такому разі відповідні коефіцієнти розкладів відомі наперед.

З урахуванням (24), початкова функція (6) після інтегрування також запишеться у вигляді ряду

$$\alpha_{3,0}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^4 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{(j+2)^2(j+4)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^j. \quad (26)$$

Виходячи безпосередньо з формул (6), (7) та враховуючи подання функцій $A(r)$, $B(r)$, $\alpha_{3,0}(r)$ у вигляді рядів (23)-(26), приходимо до висновку, що твірні функції $\alpha_{n,k}(r)$ ($n=1,2,3$)($k=1,2,3,\dots$) також будуть представлені степеневими рядами. При цьому найменший степінь в цих рядах дорівнюватиме $2n + 4k - 2$.

Отже, твірні функції $\alpha_{n,k}(r)$ можна подати у вигляді

$$\alpha_{n,k}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-2} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots), \quad (27)$$

де $c_{n,k,j}$ – коефіцієнти, що підлягають визначенню.

В такому разі

$$\alpha_{n,k-1}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-6} \sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k-1,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots). \quad (28)$$

Для добутку рядів (23) і (28) будемо мати

$$A(r)\alpha_{n,k-1}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-6} \sum_{j=0}^{\infty} e_{n,k-1,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j, \quad (29)$$

де

$$e_{n,k-1,j} = \sum_{i=0}^j A_{j-i} c_{n,k-1,i}. \quad (30)$$

Підставимо у формулу (7) замість $\alpha_{n,k}(r)$, $A(r)\alpha_{n,k-1}(r)$ їх значення (27), (29) і виконаємо інтегрування. У результаті прийдемо до рівності рядів

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_{n,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{e_{n,k-1,j}}{p_{n,k,j}} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots),$$

де

$$p_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 4)(2n + 4k + j - 2).$$

Звідси, з урахуванням (30), знаходимо

$$c_{n,k,j} = \frac{1}{p_{n,k,j}} \sum_{i=0}^j A_{j-i} c_{n,k-1,i} \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots). \quad (31)$$

Очевидно, що остання формула є рекурентною за індексом k . Обчислення за такою формулою можливі лише за наявності початкових значень. Для їх знаходження приймемо $k=1$ у формулі (28) та порівняємо результат почергово із формулами (20) та (26). У підсумку отримаємо такі початкові значення:

$$c_{n,0,0} = 1 \quad (n=1,2); \quad (32)$$

$$c_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2)(j=1,2,3,\dots); \quad (33)$$

$$c_{3,0,j} = \frac{B_j}{p_{3,0,j}^2} \quad (j=0,1,2,\dots). \quad (34)$$

Отже наявність формул (31)-(34) дозволяє послідовно обчислювати коефіцієнти рядів (27), внаслідок чого надалі їх можна вважати відомими.

Аналізуючи формули (9), (10) з урахуванням (23), (27), приходимо до висновку, що твірні функції $\beta_{n,k}(r)$ ($n=1,2$) ($k=1,2,3,\dots$) також можна подати у вигляді степеневих рядів

$$\beta_{n,k}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-2} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2)(k=1,2,3,\dots), \quad (35)$$

де $d_{n,k,j}$ – шукані коефіцієнти.

Внаслідок цього

$$\beta_{n,k-1}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-6} \sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k-1,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2)(k=1,2,3,\dots). \quad (36)$$

Для добутку рядів (23) і (36) отримаємо

$$A(r)\beta_{n,k-1}(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^{2n+4k-6} \sum_{j=0}^{\infty} f_{n,k-1,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j, \quad (37)$$

де

$$f_{n,k-1,j} = \sum_{i=0}^j A_{j-i} d_{n,k-1,i}. \quad (38)$$

Підставимо у формулу (10) замість $\alpha_{n,k}(r)$, $\beta_{n,k}(r)$, $A(r)\beta_{n,k-1}(r)$ їх значення (27), (35), (37) і виконаємо там відповідні операції. У результаті прийдемо до рівності рядів

$$\sum_{j=0}^{\infty} d_{n,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{f_{n,k-1,j}}{p_{n,k,j}^2} - 4(2n+4k+j-3) \frac{c_{n,k,j}}{p_{n,k,j}} \right) \left(\frac{r}{a}\right)^j \quad (n=1,2)(k=1,2,3,\dots)$$

Звідси, враховуючи рівність (38), одержимо наступну рекурентну формулу для шуканих коефіцієнтів

$$d_{n,k,j} = \frac{1}{p_{n,k,j}^2} \sum_{i=0}^j A_{j-i} d_{n,k-1,i} - 4(2n+4k+j-3) \frac{c_{n,k,j}}{p_{n,k,j}}. \quad (39)$$

$$(n=1,2)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots)$$

Знайдену формулу доповнимо початковими значеннями:

$$d_{n,0,0} = 1 \quad (n=1,2); \quad (40)$$

$$d_{n,0,j} = 0 \quad (n=1,2)(j=1,2,3,\dots), \quad (41)$$

які легко одержати, якщо порівняти формулу (9) з формулою (36) при $k=1$.

Формули (39)-(41) дозволяють обчислювати коефіцієнти рядів (35), відтак надалі вважатимемо їх відомими.

Розрахункові формули для фундаментальних функцій та їх безрозмірних похідних

Визначення прогинів та внутрішніх зусиль в пластині фактично зводиться до обчислення значень фундаментальних функцій $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n=1,2$), функції $X_3(r)$, а також їх безрозмірних похідних. Тому доцільно виписати для них кінцеві розрахункові формули, скориставшись знайденими вище поданнями початкових та твірних функцій у вигляді степеневих рядів.

Підставляючи у формули замість початкових та твірних функцій їх значення (26), (27), для фундаментальних функцій $X_n(r)$ ($n=1,2$) та функції $X_3(r)$ одержимо наступні подання у вигляді степеневих рядів:

$$X_1(r) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j}; \quad (42)$$

$$X_2(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \quad (43)$$

$$X_3(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^4 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{(j+2)^2(j+4)^2} \left(\frac{r}{a}\right)^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{3,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]. \quad (44)$$

Коефіцієнти цих рядів обчислюються за формулами (31)-(34).

Виходячи з (42)-(44) та використовуючи формули (17), для відповідних безрозмірних похідних матимемо:

$$\tilde{X}_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-1}; \quad (45)$$

$$\tilde{X}_2(r) = \left(\frac{r}{a}\right) \left[2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \quad (46)$$

$$\tilde{X}_3(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B_j}{(j+2)^2(j+4)} \left(\frac{r}{a}\right)^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{3,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \quad (47)$$

$$\tilde{c}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 2)c_{n,k,j} \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots); \quad (48)$$

$$\hat{X}_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-2}; \quad (49)$$

$$\hat{X}_2(r) = 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j}; \quad (50)$$

$$\hat{X}_3(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+3)B_j}{(j+2)^2(j+4)} \left(\frac{r}{a}\right)^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{3,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \quad (51)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 3)\tilde{c}_{n,k,j} \quad (n=1,2,3)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots); \quad (52)$$

$$\hat{X}_1(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-3}; \quad (53)$$

$$\hat{X}_2(r) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-1}; \quad (54)$$

$$\hat{X}_3(r) = \left(\frac{r}{a}\right) \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+3)B_j}{(j+2)(j+4)} \left(\frac{r}{a}\right)^j + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{3,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \quad (55)$$

$$\hat{c}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 4)\hat{c}_{n,k,j} \quad (n = 1, 2, 3)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots). \quad (56)$$

Застосовуючи низку формул (1)-(3), (9), (35), (42), (43), після очевидних перетворень, для фундаментальних функцій $Y_n(r)$ ($n = 1, 2$) отримаємо:

$$Y_1(r) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right) \ln \frac{r}{a} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k d_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j}; \quad (57)$$

$$Y_2(r) = \left(\frac{r}{a}\right)^2 \left[\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k c_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right) \ln \frac{r}{a} + 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k d_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]. \quad (58)$$

Щоби виписати подібні подання для відповідних безрозмірних похідних, скористаємось формулами (3), (19)-(22) та врахуємо вже знайдені формули (42), (43), (45), (46), (49), (50), (53), (54). Після відповідних викладок будемо мати:

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_1(r) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-1} \right) \ln \frac{r}{a} + \left(\frac{a}{r}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (c_{1,k,j} + \tilde{d}_{1,k,j}) \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-1}; \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_2(r) &= \left(\frac{r}{a}\right) \left[\left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \tilde{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right) \ln \frac{r}{a} + 3 + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (c_{2,k,j} + \tilde{d}_{2,k,j}) \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j} \right]; \end{aligned} \quad (60)$$

$$\tilde{d}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 2)d_{n,k,j} \quad (n = 1, 2)(k = 1, 2, 3, \dots)(j = 0, 1, 2, \dots); \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \hat{Y}_1(r) &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \hat{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-2} \right) \ln \frac{r}{a} - \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (c_{1,k,j} - 2\tilde{c}_{1,k,j} - \hat{d}_{1,k,j}) \left(\frac{r}{a}\right)^{4k+j-2}; \end{aligned} \quad (62)$$

$$\widehat{Y}_2(r) = \left(2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \widehat{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j} \right) \ln \frac{r}{a} + 5 - \quad (63)$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (c_{2,k,j} - 2\widetilde{c}_{2,k,j} - \widehat{d}_{2,k,j}) \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j} ;$$

$$\widehat{d}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 3) \widetilde{d}_{n,k,j} \quad (n=1,2)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots); \quad (64)$$

$$\widehat{Y}_1(r) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \widehat{c}_{1,k,j} \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j-3} \right) \ln \frac{r}{a} + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \quad (65)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (2c_{1,k,j} - 3\widetilde{c}_{1,k,j} + 3\widehat{c}_{1,k,j} + \widehat{d}_{1,k,j}) \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j-3} ;$$

$$\widehat{Y}_2(r) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k \widehat{c}_{2,k,j} \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j-1} \right) \ln \frac{r}{a} + 2 \left(\frac{a}{r} \right) + \quad (66)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (-K)^k (2c_{2,k,j} - 3\widetilde{c}_{2,k,j} + 3\widehat{c}_{2,k,j} + \widehat{d}_{2,k,j}) \left(\frac{r}{a} \right)^{4k+j-1} ;$$

$$\widehat{d}_{n,k,j} = (2n + 4k + j - 4) \widetilde{d}_{n,k,j} \quad (n=1,2)(k=1,2,3,\dots)(j=0,1,2,\dots). \quad (67)$$

Отже, можемо констатувати, що маємо сукупність кінцевих розрахункових формул (31)-(34), (39)-(67) для фундаментальних функцій $X_n(r)$, $Y_n(r)$ ($n=1,2$), функції $X_3(r)$, а також для їх безрозмірних похідних, у вигляді степеневих рядів.

Приклад розрахунку. Розглянемо кільцеву пластину, обидва контури якої вільні від зкріплень (рис. 3). Вихідні дані: матеріал – бетон ($E = 1,5 \cdot 10^7$ кПа, $\mu = 1/6$); зовнішній радіус - $a = 6$ м; внутрішній радіус - $b = 4,5$ м; товщина плити - $h = 0,12$ м; $k(b) = 4 \cdot 10^3$ кН / м³; $k(a) = 5 \cdot 10^3$ кН / м³; $q(b) = 80$ кПа; $q(a) = 50$ кПа. Коефіцієнт постелі $k(r)$ змінюється за експоненціальним законом від значення $k(b)$ до значення $k(a)$, а навантаження $q(r)$ – за лінійним законом від начення $q(b)$ до значення $q(a)$ (рис. 3).

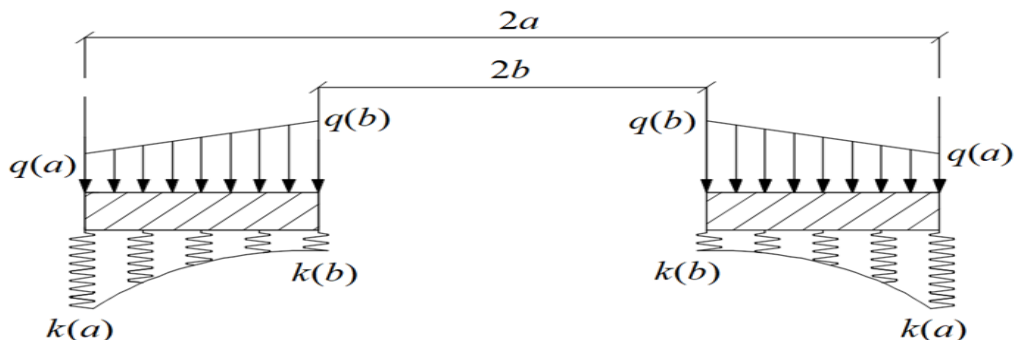


Рис. 3. Обидва контури пластини вільні від закріплень

Початкові характеристики:

$$k_0 = k(b) \exp\left(-\delta \frac{b}{a}\right), \quad A(r) = \exp\left(\delta \frac{r}{a}\right), \quad A_0 = 1, \quad A_j = \frac{\delta^j}{j!} \quad (j = 1, 2, 3, \dots),$$

$$q_0 = q(b), \quad B(r) = \frac{1}{1 - b/a} \left(1 - \frac{bq(a)}{aq(b)} - \left(1 - \frac{q(a)}{q(b)}\right) \frac{r}{a}\right),$$

$$B_0 = \frac{1}{1 - b/a} \left(1 - \frac{bq(a)}{aq(b)}\right), \quad B_1 = -\frac{1}{1 - b/a} \left(1 - \frac{q(a)}{q(b)}\right), \quad B_j = 0 \quad (j = 2, 3, 4, \dots).$$

Значення прогинів та поперечних сил наведені у табл. 1, значення радіальних та окружних моментів — у табл. 2.

Таблиця 1

Значення прогину та поперечної сили

$r, м$	$w, мм$		Відносна похибка, %	$Q_r, кН / м$		Відносна похибка, %
	АМ	МСЕ		АМ	МСЕ	
4,5000	19,220658	19,212868	0,04	0,000000	0,000000	0,00
4,5714	18,779090	18,771669	0,04	-3,454273	-3,572987	3,44
4,6429	18,338584	18,331526	0,04	-3,213374	-3,367290	4,79
4,7143	17,899068	17,892366	0,04	-3,509720	-3,208544	8,58
4,7857	17,460495	17,454147	0,04	-3,315714	-3,092879	6,72
4,8571	17,022845	17,016907	0,03	-3,293732	-3,011961	8,55
4,9286	16,586115	16,580519	0,03	-2,746131	-2,964385	7,95
5,0000	16,150318	16,145060	0,03	-2,775243	-2,945587	6,14
5,0714	15,715473	15,710547	0,03	-2,783374	-2,951153	6,03
5,1429	15,281608	15,277071	0,03	-2,772809	-2,977540	7,38
5,2143	14,848752	14,844539	0,03	-3,345812	-3,018072	9,80
5,2857	14,416932	14,413037	0,03	-3,404624	-3,072516	9,75
5,3571	13,986173	13,982594	0,03	-3,451476	-3,136339	9,13
5,4286	13,556495	13,553288	0,02	-3,588581	-3,207217	10,63
5,5000	13,127909	13,125010	0,02	-3,518147	-3,279076	6,80
5,5714	12,700419	12,697824	0,02	-3,142377	-3,351377	6,65
5,6429	12,274018	12,271724	0,02	-3,763478	-3,420494	9,11
5,7143	11,848690	11,846692	0,02	-3,283660	-3,485169	6,14
5,7857	11,424406	11,422763	0,01	-3,275149	-3,540277	8,10
5,8571	11,001128	10,999777	0,01	-3,430187	-3,586370	4,55
5,9286	10,578809	10,577744	0,01	-3,491039	-3,620559	3,71
6,0000	10,157390	10,156610	0,01	0,000000	0,000000	0,00

Таблиця 2

Значення радіального та окружного моментів

$r, м$	$M_r, кН$		Похибка, %	$M_\theta, кН$		Похибка, %
	АМ	МСЕ		АМ	МСЕ	
1	2	3	4	5	6	7
4,5000	0,000000	0,000000	0,00	2,971133	2,972132	0,03
4,5714	0,038582	0,040505	4,98	2,923787	2,922831	0,03

1	2	3	4	5	6	7
4,6429	0,061916	0,064162	3,63	2,876148	2,875264	0,03
4,7143	0,072695	0,075194	3,44	2,828355	2,827535	0,03
4,7857	0,073392	0,076102	3,69	2,780562	2,779811	0,03
4,8571	0,066266	0,069143	4,34	2,732942	2,732258	0,03
4,9286	0,053370	0,056340	5,56	2,685674	2,685043	0,02
5,0000	0,036560	0,039554	8,19	2,638940	2,638353	0,02
5,0714	0,018497	0,020481	10,72	2,592922	2,592375	0,02
5,1429	0,000532	0,000597	12,14	2,547799	2,547286	0,02
5,2143	-0,02066	-0,018820	8,93	2,503740	2,503253	0,02
5,2857	-0,03935	-0,036648	6,88	2,460903	2,460433	0,02
5,3571	-0,05446	-0,051909	4,69	2,419434	2,418975	0,02
5,4286	-0,06622	-0,063809	3,64	2,379461	2,379013	0,02
5,5000	-0,07401	-0,071715	3,10	2,341093	2,340659	0,02
5,5714	-0,07739	-0,075169	2,87	2,304420	2,304001	0,02
5,6429	-0,07607	-0,073905	2,84	2,269506	2,269106	0,02
5,7143	-0,06992	-0,067804	3,02	2,236393	2,236013	0,02
5,7857	-0,05897	-0,056867	3,56	2,205095	2,204741	0,02
5,8571	-0,04241	-0,041272	2,68	2,175596	2,175274	0,01
5,9286	-0,02109	-0,021359	1,30	2,147853	2,147570	0,01
6,0000	0,000000	0,000000	0,00	2,121788	2,122178	0,02

Епюри прогинів та поперечних сил наведено на рис. 4, а епюри радіальних та окружних згинальних моментів — на рис. 5.

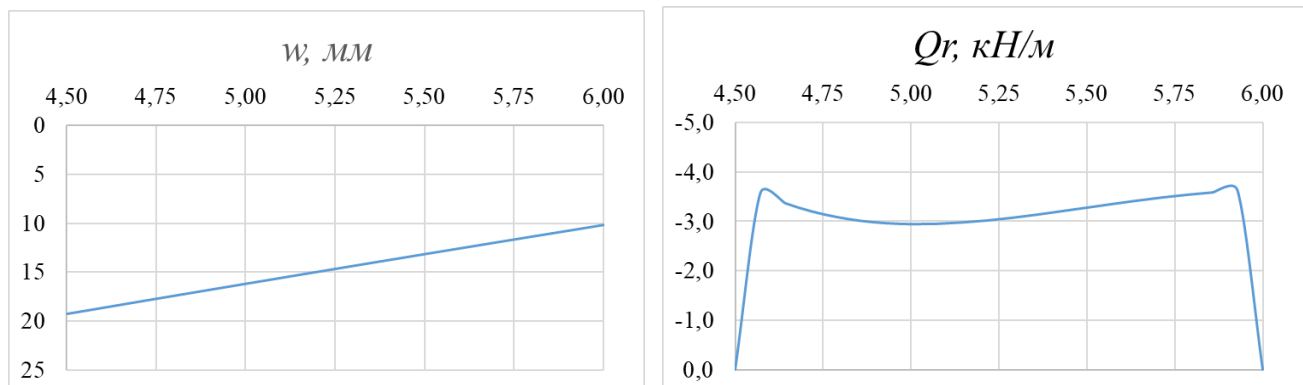


Рис. 4. Епюри прогинів та поперечних сил

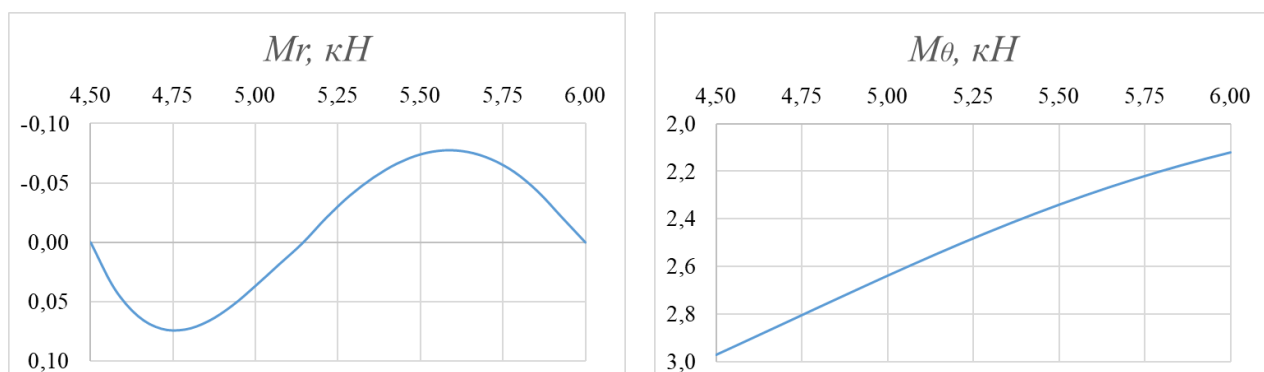


Рис. 5. Епюри радіальних та окружних згинальних моментів

Висновки

1. Запропоновано аналітичний метод розрахунку на осесиметричний згин кільцевих пластин з вільними від закріплень контурами, що опираються на суцільну пружну основу з експоненціальною неоднорідністю.

2. Оскільки авторський метод ґрунтується на точному розв'язку диференціального рівняння, отримані тут чисельні результати можна трактувати, як точні. Такі розв'язки є особливо цінними, оскільки вони служать критеріями, по яким можна оцінювати точність різного роду наближених розв'язків.

3. Порівняння розрахунків авторським методом з відповідними розрахунками методом скінченних елементів у програмному комплексі ЛІРА підтверджує валідність запропонованого методу.

4. Встановлено, що найбільша похибка методу скінченних елементів виникає в околицях точок, де функції внутрішніх зусиль змінюють знак.

Список літератури

1. Foyouzat, M.A., & Mofid, M. (2019). An analytical solution for bending of axisymmetric circular/annular plates resting on a variable elastic foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 74, 462–470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.006>.
2. Surianinov, M.H., Krutii, Y.S., Karnaukhova, A.S., & Klymenko, O.M. (2022). Analytical method for calculating annular plates on a variable elastic base. *Modern Construction and Architecture*, (2), 37–43. <https://doi.org/10.31650/2786-6696-2022-2-37-43>
3. Surianinov, M., Krutii, Y., Kirichenko, D., & Klimenko, O. (2022). Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor. *Mechanics and Mathematical Methods*, 4(2), 43–52. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-43-52>
4. Surianinov, M., Krutii, Y., Klymenko, O., Vakulenko, V., & Rudakov, S. (2023). Axisymmetric bending of circular plates on a variable elastic base. *International scientific applied conference "Problems of emergency situations"* (с. 3–10). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/p-L9yr2n>
5. Surianinov, M.H., Krutii, Y.S., Kirichenko, D.O., & Klymenko, O.M. (2022). Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor. *Mechanics and Mathematical Methods*, 4(2), 43–52. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-43-52>
6. Сур'янінов, М.Г., Крутій, Ю.С., Кириченко, Д.О., & Клименко, О.В. (2023). До розрахунку кільцевих пластин на змінній пружній основі. *Містобудування та територіальне планування*, (83), 304–313. <https://doi.org/10.32347/2076-815x.2023.83.304-313>
7. Крутій, Ю.С., Сур'янінов, М.Г., Карнаухова, Г.С., Перпері, А.О., & Клименко, О.М. (2025). Аналітичний розрахунок кільцевих пластин, що спираються на пружну основу з експоненціальною неоднорідністю. *Просторовий розвиток*, (11), 405–419.
8. Surianinov, M., Krutii, Y., Klymenko, O., Vakulenko, V., & Rudakov, S. (2023). Axisymmetric Bending of Circular Plates on a Variable Elastic Base. *Construction Technologies and Architecture*, (9), 3–10. <https://doi.org/10.4028/p-l9yr2n>
9. Krutii, Y., Surianinov, M., Klymenko, O., Karnaukhova, H., & Perperi, A. (2024). Analytical method for calculating ring plates on an elastic foundation with an arbitrary continuously variable bedding factor. *Key Engineering Materials*, 1005, 121–132. (індексується Scopus)
10. Karasin A. A finite grid solution for circular plates on elastic foundations / Abdulhalim Karasin, Polat Gülkan, Gultekin Aktas // *KSCE Journal of Civil Eng.* 2014. № 19(4). P. 1157-1163.

11. Crook A.W. A transfer matrix method for calculating the elastic behaviour of annular plates. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1991; 26(1):65-73.
12. Vaskova, J., & Matečková, P. (2015). Software for Design and Assessment of Rotationally Symmetrically Loaded Reinforced Concrete Slabs in the Shape of Circle or Ring. In *Applied Mechanics and Materials* (Vol. 749, pp. 368–372). Trans Tech Publications, Ltd.
13. Vivio, F., & Vullo, V. (2010). Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(9), 1234–1252. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.05.011>
14. Behravan Rad, A. (2012). Semi-Analytical solution for functionally graded solid circular and annular plates resting on elastic foundations subjected to axisymmetric transverse loading. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 4(2), 205–222. <https://doi.org/10.4208/aamm.10-m11104>
15. Behravan Rad, A., & Alibeigloo, A. (2013). Semi-Analytical solution for the static analysis of 2D functionally graded solid and annular circular plates resting on elastic foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(7), 515–528. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.634088>
16. Krutii, Y.S., Sur'yaninov, M.G., & Karnaukhova, G.S. (2021). Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 1. Analytical relations. *Strength of Materials*, 53(2), 247–257. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00282-2>

Doctor of Science, Professor **Mykola Surianinov**,
Doctor of Science, Professor **Jurii Krutii**,
PhD **Alla Perperi**, Postgraduate **Olexey Klymenko**,
Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa

ANALYTICAL CALCULATION OF RING PLATES WITH CONTOURS FREE FROM FIXINGS

An analytical method for calculating the bending of annular plates with free-of-fixation contours on a non-uniform elastic Winkler base is proposed, when the bed coefficient and the load are given by arbitrary continuous functions. In the Winkler model, the elastic base on which the plate rests is represented as a set of vertical, closely spaced, unconnected springs. Such a model can be described by a single bed coefficient. In the simplest case, when the elastic base is considered homogeneous, the bed coefficient is constant, which greatly simplifies the solution of the corresponding differential equations. This can explain the widely used assumption of the homogeneity of the base. However, such an assumption is quite approximate, and for more accurate studies, it is necessary to take into account the heterogeneity of the base. This work is a continuation of the authors' research on the symmetric bending of annular plates on a non-uniform elastic base. The research is based on the exact solution of the differential equation of symmetric bending of round and ring plates, which was found by the direct integration method. To develop a method for numerical implementation of the exact solution, the classical theory of functional series is used. To verify the calculation results obtained by the author's method, the

finite element method implemented in the LIRA software package is used. Since the author's method is based on the exact solution of the differential equation, the numerical results obtained here can be interpreted as exact. Comparison of calculations by the author's method with calculations in the LIRA package confirms the validity of the proposed method. It is established that the largest error of the finite element method occurs in the vicinity of points where the functions of internal forces change sign.

Keywords: annular plate; Winkler model; exact solution; functional series theory; finite element method; LIRA

REFERENCES

1. Foyouzat, M.A., & Mofid, M. (2019). An analytical solution for bending of axisymmetric circular/annular plates resting on a variable elastic foundation. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 74, 462–470. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2019.01.006>. {in English}
2. Surianinov, M.H., Krutii, Y.S., Karnaukhova, A.S., & Klymenko, O.M. (2022). Analytical method for calculating annular plates on a variable elastic base. *Modern Construction and Architecture*, (2), 37–43. <https://doi.org/10.31650/2786-6696-2022-2-37-43>. {in English}
3. Surianinov, M., Krutii, Y., Kirichenko, D., & Klimenko, O. (2022). Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor. *Mechanics and Mathematical Methods*, 4(2), 43–52. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-43-52>. {in English}
4. Surianinov, M., Krutii, Y., Klymenko, O., Vakulenko, V., & Rudakov, S. (2023). Axisymmetric bending of circular plates on a variable elastic base. *International scientific applied conference "Problems of emergency situations"* (p. 3–10). Trans Tech Publications Ltd. <https://doi.org/10.4028/p-L9yr2n>. {in English}
5. Surianinov, M.H., Krutii, Y.S., Kirichenko, D.O., & Klymenko, O.M. (2022). Calculation of annular plates on an elastic base with a variable bedding factor. *Mechanics and Mathematical Methods*, 4(2), 43–52. <https://doi.org/10.31650/2618-0650-2022-4-2-43-52>. {in English}
6. Surianinov, M.H., Krutii, Yu.S., Kyrychenko, D.O., & Klymenko, O.V. (2023). Do rozrakhunku kiltsevykh plastyn na zminnii pruzhnii osnovi. *Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia*, (83), 304–313. {in Ukrainian}
7. Krutii, Yu.S., Surianinov, M.H., Karnaukhova, H.S., Perperi, A.O., & Klymenko, O.M. (2025). Analitychnyi rozrakhunok kiltsevykh plastyn, shcho spyraiutsia na pruzhnu osnovu z eksponentsialnoiu neodnorodnistiu. *Prostorovy rozvytok*, (11), 405–419. {in Ukrainian}

8. Surianinov, M., Krutii, Y., Klymenko, O., Vakulenko, V., Rudakov, S. (2023). Axisymmetric Bending of Circular Plates on a Variable Elastic Base. *Construction Technologies and Architecture*, (9), 3–10. <https://doi.org/10.4028/p-19yr2n>. {in English}
9. Krutii, Y., Surianinov, M., Klymenko, O., Karnaukhova, H., & Perperi, A. (2024). Analytical method for calculating ring plates on an elastic foundation with an arbitrary continuously variable bedding factor. *Key Engineering Materials*, 1005, 121–132. (ІНДЕКСУЄТЬСЯ Scopus) <https://doi.org/10.4028/p-gp8pyq>. {in English}
10. Karasin A. A finite grid solution for circular plates on elastic foundations / Abdulhalim Karasin, Polat Gülkan, Gultekin Aktas // *KSCE Journal of Civil Eng.* 2014. № 19(4). P. 1157-1163. <https://doi.org/10.1007/s12205-014-0713-x>. {in English}
11. Crook A.W. A transfer matrix method for calculating the elastic behaviour of annular plates. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*. 1991; 26(1):65-73. <https://doi.org/10.1243/03093247V261065>. {in English}
12. Vaskova, J., & Matečková, P. (2015). Software for Design and Assessment of Rotationally Symmetrically Loaded Reinforced Concrete Slabs in the Shape of Circle or Ring. In *Applied Mechanics and Materials* (Vol. 749, pp. 368–372). Trans Tech Publications, Ltd. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.749.368>. {in English}
13. Vivio, F., & Vullo, V. (2010). Closed form solutions of axisymmetric bending of circular plates having non-linear variable thickness. *International Journal of Mechanical Sciences*, 52(9), 1234–1252. <https://doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2010.05.011>. {in English}
14. Behravan Rad, A. (2012). Semi-Analytical solution for functionally graded solid circular and annular plates resting on elastic foundations subjected to axisymmetric transverse loading. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 4(2), 205–222. <https://doi.org/10.4208/aamm.10-m11104>. {in English}
15. Behravan Rad, A., & Alibeigloo, A. (2013). Semi-Analytical solution for the static analysis of 2D functionally graded solid and annular circular plates resting on elastic foundation. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 20(7), 515–528. <https://doi.org/10.1080/15376494.2011.634088>. {in English}
16. Krutii, Y.S., Sur'yaninov, M.G., & Karnaukhova, G.S. (2021). Calculation method for axisymmetric bending of circular and annular plates on a changeable elastic bed. Part 1. Analytical relations. *Strength of Materials*, 53(2), 247–257. <https://doi.org/10.1007/s11223-021-00282-2>. {in English}