

DOI: 10.32347/2076-815x.2024.86.370-387

УДК 622.741.3.022;622.7;620.133

к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,
yuchovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,

доцент **Чередніченко П.П.**,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,

к.т.н., доцент **Москвітін А.С.**,
moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646,
Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІЗ НАГРІВУ ПРОПІЛЕНГЛІКОЛЮ/ЕТИЛЕНГЛІКОЛЮ У ЦИЛІНДРИЧНОМУ КАНАЛІ СОНЯЧНОГО ТЕПЛООВОГО КОЛЕКТОРУ

При проектуванні теплових сонячних колекторів розглядаються нестационарні умови роботи геліосистеми з визначенням миттєвої теплової продуктивності та температури теплоносіїв протягом заданої доби або періоду. Як відомо кількість корисної теплоти, що поглинається сонячним тепловим колектором має пряму залежність від температури теплоносія на вході та на виході з колектору. Розрахунок системи споживання та/або акумулювання теплоти також потребує значень температури теплоносія на виході з сонячного колектору. Нагрів теплоносія в сонячному колекторі можна поділити на два етапи – нагрів від сонячної енергії стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в тепловому сонячному колекторі та нагрів пропіленгліколю/етиленгліколю в теплообміннику (циліндричному каналі). В даній роботі наведено сім способів визначення поля температур стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в залежності від початкових та граничних умов. Найбільш загальний випадок щодо розрахунку температурного поля пропіленгліколю/етиленгліколю передбачає наявність теплообміну на поверхнях його контакту зі стінками циліндричного каналу та з оточуючим середовищем. Розв'язок знаходимо за допомогою методу функцій Гріна.

Ключові слова: сонячний тепловий колектор; нагрівання теплоносія в сонячному колекторі; температура теплоносія в сонячному колекторі; температура теплообмінника в сонячному колекторі; поле температур теплоносія в циліндричному каналі; пропіленгліколь; етиленгліколь.

Постановка проблеми. При проектуванні теплових сонячних колекторів розглядаються нестационарні умови роботи геліосистеми з визначенням миттєвої теплової продуктивності та температури теплоносіїв протягом заданої доби. Як відомо кількість корисної теплоти, що поглинається сонячним тепловим колектором має пряму залежність від температури теплоносія на вході та на виході з колектору. Розрахунок системи споживання та/або акумулювання

теплоти також потребує значень температури теплоносія на виході з сонячного колектору. Нагрів теплоносія в сонячному колекторі можна поділити на два етапи – нагрів від сонячної енергії стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в тепловому сонячному колекторі та нагрів пропіленгліколю/етиленгліколю в теплообміннику (циліндричному каналі).

Аналіз публікацій по темі досліджень. Визначення кліматичних умов роботи сонячного теплового колектору і рівняння балансу роботи та розрахунок геліосистеми і системи акумулювання теплоти вимагає визначення температури теплоносія в сонячному тепловому колекторі [1-4].

Мета роботи. Запропоновано розділити розрахунок нагріву теплоносія в сонячному тепловому колекторі на два етапи – нагрів від сонячної енергії стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в тепловому сонячному колекторі та нагрів пропіленгліколю/етиленгліколю в теплообміннику (циліндричному каналі). Визначити поля температур стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в залежності від різних варіантів початкових та граничних умов. При розрахунку необхідно врахувати труднощі, пов'язані зі значною нелінійністю граничних умов типу "задане поверхнєве випромінювання". При аналітичному розрахунку температурного поля пропіленгліколю/етиленгліколю, за допомогою методу функцій Гріна, розглянемо найбільш загальний випадок, який передбачає наявність теплообміну на його поверхнях контакту зі стінками циліндричного каналу та з оточуючим середовищем.

Виклад основного матеріалу дослідження. І задача: Спочатку від сонячної енергії йде нагрівання стінок циліндричного каналу. Отже, $R_1 \leq r \leq R_2$; $0 \leq z \leq l$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, але існують різні граничні умови для верхньої ($0 \leq \varphi \leq \pi$) й для нижньої ($\pi < \varphi \leq 2\pi$) поверхонь (рис.1, 2).

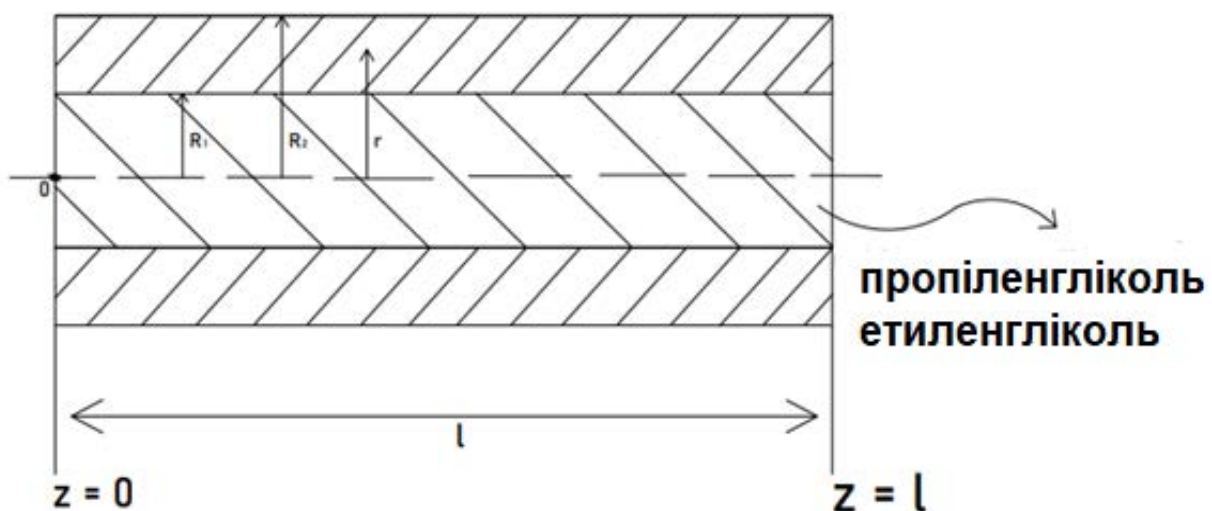


Рис. 1. Розріз вздовж циліндричного каналу.

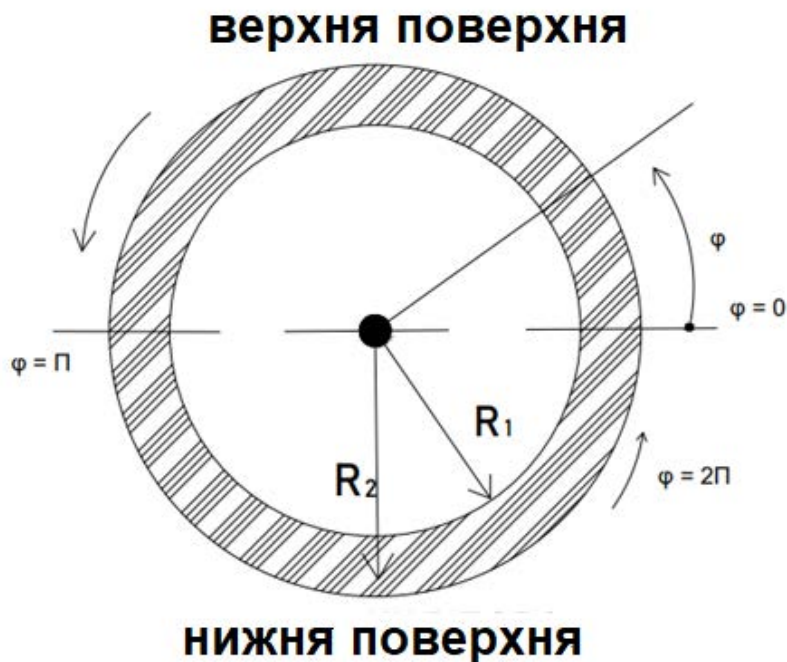


Рис.2. Поперечний розріз каналу.

Варіант А (І задачі): (На всіх поверхнях $z=0$, $z=l$, $r = R_1$, $r = R_2$ циліндричного каналу існує умова “заданої тепловіддачі на поверхні” [5]). Формально математично умова “задана тепловіддача поверхні” формується наступним чином:

$$1) r=R_1: h_1 \cdot [T_{\text{егл.о}} - T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)] = -\lambda_{\text{ст.}} \cdot \frac{\partial T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)}{\partial r} \quad (1)$$

де h_1 – коефіцієнт тепловіддачі поверхні $r = R_1$ стінки; $\lambda_{\text{ст.}}$ – коефіцієнт теплопровідності матеріалу стінки; $T_{\text{егл.о}}$ – початкова температура (не нагрітого ще етиленгліколю/(полі-) етиленгліколю, що знаходиться у циліндричному каналі); $T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)$ – температура стінки циліндричного каналу у циліндричній системі координат (r, φ, z) ; t – час.

Вказану $T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)$ слід знайти з рівняння теплопровідності, яке у циліндричній системі координат має вигляд:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial t} = a_{\text{ст.}} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T_{\text{ст.}}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_{\text{ст.}}}{\partial z^2} \right] \quad (2)$$

де $a_{\text{ст.}}$ – коефіцієнт температуропровідності матеріалу.

Граничну умову (1) легко подати у наступному виді:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} - k_1 \cdot T_{\text{ст.}} = -\frac{h_1}{\lambda_{\text{ст.}}} \cdot T_{\text{егл.о}} \Leftrightarrow \frac{\partial (T_{\text{ст.}})}{\partial r} - k_1 \cdot T_{\text{ст.}} = -k_1 \cdot T_{\text{егл.о}} \quad (3)$$

де $k_1 = \frac{h_1}{\lambda_{\text{ст.}}}$.

У подальшому, як і у [6, 20], ми користуватимемось саме останнім записом цієї граничної умови на поверхні $r = R_1$, тобто:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} - k_1 \cdot T_{\text{ст.}} = -k_1 \cdot T_{\text{вгл.о}} \quad (3^*)$$

2) $r = R_2$: гранична умова на цій поверхні має вид:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} + k_2 \cdot T_{\text{ст.}} = k_2 \cdot T_{\text{сер.о}}, \quad k_2 = \frac{h_2}{\lambda_{\text{ст.}}} \quad (4)$$

де h_2 – коефіцієнт тепловіддачі поверхні $r = R_2$ стінки; $T_{\text{сер.о}}$ - температура оточуючого поверхню $r = R_2$ середовища (вважаємо її певною константою).

3) $z=0$

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial z} - k_3 \cdot T_{\text{ст.}} = -k_3 \cdot T_{\text{сер.о}}, \quad k_3 = \frac{h_3}{\lambda_{\text{ст.}}} \quad (5)$$

де $T_{\text{сер.о}}$ - визначена вище, h_3 - коефіцієнт тепловіддачі поверхні $z=0$ циліндричного каналу.

4) $z=l$:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial z} + k_4 \cdot T_{\text{ст.}} = k_4 \cdot T_{\text{сер.о}}, \quad k_4 = \frac{h_4}{\lambda_{\text{ст.}}} \quad (6)$$

де h_4 – коефіцієнт тепловіддачі поверхні $z = l$ циліндричного каналу.

Початкова умова задачі (у момент $t = 0$). У загальному випадку $T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) \big|_{t=0} = f(r, \varphi, z)$, тобто поверхня стіни має певний температурний розподіл у системі координат $f(r, \varphi, z)$, відмінний від однорідного поля температур на всіх поверхнях стінок циліндричного каналу (це не принципово!). Для спрощення запису розв'язку рівняння (2) за граничних умов (1), (4), (5), (6), вважаємо, що:

$$f(r, \varphi, z) = T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) \big|_{t=0} = T_{\text{ст.о}} = \text{const}, \quad T_{\text{ст.о}} < T_{\text{сер.о}} \quad (7)$$

Для знаходження розв'язків рівняння (2) методом функції Гріна [1] використовуватимемо саме таку, як (7), початкову умову задачі. Тоді розв'язок рівняння (2) за початковою умови (7) та граничних умов (1), (4), (5), (6) має наступний вид:

$$\begin{aligned} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) = & \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} T_{\text{ст.о}} \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot R_1 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^0 (-k_1 \cdot T_{\text{вгл.о}}) \cdot G(r, \varphi, z, R_1, \eta, \zeta, t - \tau) d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{\text{ст.}} \cdot R_2 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^0 (+k_2 \cdot T_{\text{сер.о}}) \cdot G(r, \varphi, z, R_2, \eta, \zeta, t - \tau) d\eta d\zeta d\tau - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} (-k_3 \cdot T_{\text{сер.о}}) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau + \end{aligned} \quad (8)$$

$$+ a_{\text{ст.}} \cdot \int_0^t \int_0^{R_1} \int_0^{R_2} (+k_4 \cdot T_{\text{сеп.о}}) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, l, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau.$$

У виразі (8) введена під знак інтегралу функція Гріна $G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t)$, яка може бути подана наступним чином:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \quad (9)$$

Співмножники, що стоять у правій частині (8), задовольняють наступним співвідношенням:

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp(-\mu_{nm}^2 \cdot a_{\text{ст.}} \cdot t)}{(k_2^2 \cdot R_2^2 + \mu_{nm}^2 \cdot R_2^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2) - (k_1^2 \cdot R_1^2 + \mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1)} \quad (10)$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = [\mu_{nm} \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot R_1) - k_1 \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot R_1)] \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - [\mu_{nm} \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot R_1) - k_1 \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot R_1)] \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r). \quad (11)$$

де, $A_0=1$, $A_n=2$, при $n=1, 2, \dots$; $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера, відповідно [5-20]; μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$\begin{aligned} & [\mu \cdot I_n(\mu R_1) - k_1 \cdot I_n(\mu R_1)] \cdot [\mu \cdot Y_n(\mu R_2) + k_2 \cdot Y_n(\mu R_2)] = \\ & = [\mu \cdot Y_n(\mu R_1) - k_1 \cdot Y_n(\mu R_1)] \cdot [\mu \cdot I_n(\mu R_2) + k_2 \cdot I_n(\mu R_2)]. \end{aligned} \quad (12)$$

Другий співмножник у правій частині (9) має вид:

$$G_2(z, \zeta, t) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s(z) \cdot h_s(\zeta)}{\|h_s\|^2} \cdot \exp(-a_{\text{ст.}} \cdot \lambda_s^2 \cdot t), \quad (13)$$

де,

$$\begin{cases} h_s(z) = \cos(\lambda_s \cdot z) + \frac{k_3}{\lambda_s} \cdot \sin(\lambda_s \cdot z), \\ \|h_s\|^2 = \frac{k_4}{2\lambda_s^2} \cdot \frac{(\lambda_s^2 \cdot k_3^2)}{(\lambda_s^2 \cdot k_4^2)} + \frac{k_3}{2\lambda_s^2} + \frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{k_3^2}{\lambda_s^2}\right) \end{cases} \quad (14)$$

де, λ_s – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$\frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{k_3 + k_4}{\lambda^2 - k_3 \cdot k_4}. \quad (15)$$

У виразах (11), (12) штрих біля функції означає однократне диференціювання по аргументу цієї функції.

Варіант Б (І задачі): На всіх поверхнях $z=0$, $z=l$, $r=R_1$, $r=R_2$ циліндричного каналу заданий тепловий потік [16]. Тоді треба розв'язати рівняння (2) й визначити поле температурне стінок циліндричного каналу $T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)$ для початкової умови (7) й наступних граничних умов:

$r=R_1$ – поверхня:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} = -k_1 \cdot T_{\text{сеп.о}} \quad (16)$$

$r = R_2$ – поверхня:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial r} = k_2 \cdot T_{\text{сер.о}} \quad (17)$$

$z = 0$ – поверхня:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial z} = -k_3 \cdot T_{\text{сер.о}} \quad (18)$$

$z = l$ – поверхня:

$$\frac{\partial T_{\text{ст.}}}{\partial z} = +k_4 \cdot T_{\text{сер.о}} \quad (19)$$

Розв'язок рівняння (2) за початкової умови (7) й граничних умов (16) – (19) має той самий вид (8), але функція Гріна визначається інакше [6]:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \quad (20)$$

де,

$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \zeta}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\alpha_{\text{ст.}} \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{l^2}\right), \quad (21)$$

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp\left(-\mu_{nm}^2 \cdot \alpha_{\text{ст.}} \cdot t\right)}{(\mu_{nm}^2 \cdot R_2^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2) - (\mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1)} \quad (22)$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = I_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r), \quad (23)$$

де, $A_0=1$, $A_n=2$, при $n=1, 2, \dots$; $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку, відповідно; μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n'(\mu R_1) \cdot Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1) \cdot I_n'(\mu R_2) = 0 \quad (24)$$

Варіант В. (I задачі): На всіх поверхнях циліндричного каналу ($z=0$, $z=l$, $r = R_1$, $r = R_2$) заданий температурний розподіл (температурне поле у системі циліндричних координат (r, φ, z)).

Треба розв'язати рівняння (2) за наступних умов:
початкова умова:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad (25)$$

гранична умова при $r = R_1$:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_1} = g_1(\varphi, z, t), \quad (26)$$

гранична умова при $r = R_2$:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_2} = g_2(\varphi, z, t), \quad (27)$$

гранична умова при $z=0$:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{z=0} = g_3(r, \varphi, t), \quad (28)$$

гранична умова при $z=l$:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=l} = g_4(r, \varphi, t), \quad (29)$$

Розв'язок рівняння (2) за початкової умови (25) та граничних умов (26)-(29) шукаємо методом функції Гріна [6].

Для заданої задачі маємо такий розв'язок:

$$\begin{aligned} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) = & \iiint_{0 \leq \xi \leq R_1, 0 \leq \eta \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq R_2} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta + \\ & + a_{\text{ст.}} \cdot R_1 \iiint_{0 \leq \eta \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq R_2} g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\xi=R_1} \cdot d\eta d\zeta d\tau - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot R_2 \iiint_{0 \leq \eta \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq R_2} g_2(\eta, \zeta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\xi=R_2} \cdot d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{\text{ст.}} \iiint_{0 \leq \xi \leq R_1, 0 \leq \eta \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq R_2} g_3(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=0} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau - \\ & - a_{\text{ст.}} \iiint_{0 \leq \xi \leq R_1, 0 \leq \eta \leq 2\pi, 0 \leq \zeta \leq R_2} g_4(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=l} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (30)$$

Тут введена наступна функція Гріна:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \quad (31)$$

де,

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot B_{nm} \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cdot \cos[n \cdot (\varphi - \eta)]}{\exp(+\mu_{nm}^2 \cdot a_{\text{ст.}} \cdot t)} \quad (32)$$

$$A_n = \begin{cases} 1/2 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} \quad B_{nm} = \frac{\mu_{nm}^2 \cdot I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2)}{I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1) - I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2)} \quad (33)$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = I_n(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r) \quad (34)$$

де, $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку від аргументу r , відповідно до [5-20], а числа μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n(\mu R_1) \cdot Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1) \cdot I_n(\mu R_2) = 0 \quad (35)$$

Випадок Г. (I-ої задачі): Розв'яжемо задачу за умов, коли задане початкове (у момент $t = 0$) температурне поле стінок циліндричного каналу, тобто:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad (36)$$

а граничні умови змішані_ (на поверхнях $r = R_1$ й $r = R_2$ задані температурні поля, тобто:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_1} = g_1(z, \varphi, t), \tag{37}$$

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_2} = g_2(z, \varphi, t), \tag{38}$$

А на поверхнях $z=0$ й $z=l$ задані теплові потоки, тобто:

$$\left. \frac{\partial T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = g_3(r, \varphi, t), \tag{39}$$

$$\left. \frac{\partial T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)}{\partial z} \right|_{z=l} = g_4(r, \varphi, t), \tag{40}$$

Розв'язок знаходимо за допомогою методу функцій Гріна [6]. Маємо:

$$\begin{aligned} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) = & \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{l \ 2\pi \ R_2} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta + \\ & + a_{\text{ст.}} \cdot R_1 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\xi=R_1} \cdot d\eta d\zeta d\tau - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot R_2 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_2(\eta, \zeta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\xi=R_2} \cdot d\eta d\zeta d\tau + \\ & - a_{\text{ст.}} \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{t \ 2\pi \ R_2} g_3(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{\text{ст.}} \iiint_{0 \ 0 \ R_1} g_4(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, l, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \tag{41}$$

Тут:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \tag{42}$$

$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \zeta}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a_{\text{ст.}} \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{l^2}\right), \tag{43}$$

$$\begin{aligned} G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = & \\ = & \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot B_{nm} \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cdot \cos[n \cdot (\varphi - \eta)]}{\exp(-\mu_{nm}^2 \cdot a_{\text{ст.}} \cdot t)} \end{aligned} \tag{44}$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_n &= \begin{cases} 1/2 & \text{при } n = 0, \\ 1 & \text{при } n \neq 0, \end{cases} & B_{nm} &= \frac{\mu_{nm}^2 \cdot I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2)}{I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1) - I_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2)} \\ Z_n(\mu_{nm} \cdot r) &= I_n(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r) \end{aligned} \right. \tag{45}$$

де, $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку від аргументу r , відповідно, μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n(\mu R_1) \cdot Y_n(\mu R_2) - Y_n(\mu R_1) \cdot I_n(\mu R_2) = 0 \quad (46)$$

Випадок Д. (I-ої задачі): Розв'яжемо задачу за умов, коли задане початкове (у момент $t = 0$) температурне поле стінок циліндричного каналу, тобто:

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad (36^*)$$

а граничні умови змішані (на поверхнях $r = R_1$ й $r = R_2$ задані теплові потоки, тобто :

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_1} = g_1(\varphi, z, t), \quad (47)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_2} = g_2(\varphi, z, t), \quad (48)$$

на поверхнях $z=0$ й $z=l$ задані не теплові потоки, а температури (температурні поля):

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{z=0} = g_3(r, \varphi, t), \quad (49)$$

$$T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)|_{z=l} = g_4(r, \varphi, t), \quad (50)$$

Розв'язок цієї задачі розшукуємо методом функцій Гріна [6]. Маємо наступні співвідношення:

$$\begin{aligned} T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t) = & \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{l \ 2\pi \ R_2} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot R_1 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_1, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{\text{ст.}} \cdot R_2 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_2(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_2, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{\text{ст.}} \cdot \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{t \ 2\pi \ R_2} g_3(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=0} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau - \\ & - a_{\text{ст.}} \cdot \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{t \ 2\pi \ R_2} g_4(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=l} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (51)$$

Тут, у (51), введені наступні позначення:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \quad (52)$$

$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \zeta}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a_{\text{ст.}} \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{l^2}\right), \quad (53)$$

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} + \quad (54)$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp(-\mu_{nm}^2 \cdot a_{ст.} \cdot t)}{(\mu_{nm}^2 \cdot R_2^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2) - (\mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1)}$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = I_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r). \quad (55)$$

де, $A_0=1$, $A_n=2$, при $n=1, 2, \dots$; $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку від аргументу r , відповідно; штрих біля вказаних функцій означає однократне диференціювання по аргументу цієї функції; μ_{nm} - додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n'(\mu R_1) \cdot Y_n'(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1) \cdot I_n'(\mu R_2) = 0 \quad (56)$$

II задача. Враховуємо, що $R_1 \leq r \leq R_2$; $0 \leq z \leq l$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ (але існують різні граничні умови для "верхньої" (освітленої) бічної грані циліндричного каналу ($0 \leq \varphi \leq \pi$) й для "нижньої" (затемненої) бічної грані циліндричного каналу ($\pi < \varphi \leq 2\pi$). Користуючись [20], визначимо коректно ці граничні умови. При цьому слід врахувати труднощі, пов'язані зі значною нелінійністю граничних умов типу "задане поверхневе випромінювання". Поверхня непрозорої речовини, повернута до джерела радіації (або поглинання), при температурі T_r (r - означає "radiation" – випромінювання, радіація) випромінює тепловий потік:

$$\sigma \cdot \mathcal{F}_1 [T_r^4 - T_{ст.}^4(r, \varphi, z, t)|_{r=R_2}] = -\lambda_{ст.} \cdot \frac{\partial}{\partial r} T_{ст.}(r, \varphi, z, t) \Big|_{r=R_2} \quad (57)$$

де, $\sigma = 5,6697 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot (\text{°К})^4)$ – постійна в рівнянні променевипромінювання закону Стефана-Больцмана; \mathcal{F}_1 - сумарний коефіцієнт променевипромінювання й форми, $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Аналогічну умову до (57) записуємо для $\pi < \varphi \leq 2\pi$, лише слід замінити $\mathcal{F}_1 \rightarrow \mathcal{F}_2$.

Якщо $T_r \gg T_{ст.}(r, \varphi, z, t)$, тоді гранична умова (57) зводиться до умови заданого теплового потоку.

Отже, у цьому варіанті задачі II маємо наступні граничні умови:

Випадок А (II задача):

початкова умова:

$$T_{ст.}(r, \varphi, z, t)|_{t=0} = f(r, \varphi, z), \quad (58)$$

Зокрема, $f(r, \varphi, z) = T_{сер.о} = const$, тобто до моменту нагрівання сонячною радіацією циліндричний канал (його стінка $r = R_2$) знаходився під температурою, яку має його оточує середовище, що ще не нагрівалось.

граничні умови зводяться до наступних:

поверхня $r = R_1$:

$$\frac{\partial}{\partial r} T_c = g_1(\varphi, z, t), \quad (59)$$

де функція $g_1(\varphi, z, t)$ описує тепловий потік, який виникає на стінці каналу $r = R_1$ від поліпропілен/етиленгліколю, з яким вона контактує; поверхня $r = R_2$:

$$\frac{\partial}{\partial r} T_c = g_2(\varphi, z, t), \quad (60)$$

де $g_2(\varphi, z, t)$ має наступний вид:

$$g_2(\varphi, z, t) = \begin{cases} -\sigma \cdot F_1 \cdot T_r^4 / \lambda_{ст.}, & 0 \leq \varphi \leq \pi \\ -\sigma \cdot F_2 \cdot T_r^4 / \lambda_{ст.}, & 0 < \varphi \leq 2\pi \end{cases} \quad (61)$$

поверхня $z = 0$:

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} = g_3(r, \varphi, t), \quad (62)$$

де функція $g_3(r, \varphi, t)$ описує у загальному випадку тепловий потік через поверхню $z = 0$ з боку оточуючого її середовища;

поверхня $z = l$:

$$\frac{\partial T_c}{\partial z} = g_4(r, \varphi, t), \quad (63)$$

де функція $g_4(r, \varphi, t)$ описує у загальному випадку тепловий потік через поверхню $z = l$ з боку оточуючого її середовища;

Розв'язок рівняння (2) за умов (58), (59)-(63), має наступний вид [6]:

$$\begin{aligned} T_{ст.}(r, \varphi, z, t) = & \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_2} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta - \\ & - a_{ст.} \cdot R_1 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^l g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_1, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau + \\ & + a_{ст.} \cdot R_2 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^l g_2(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_2, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau - \\ & - a_{ст.} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} g_3(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{ст.} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} g_4(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, l, t - \tau) \cdot \xi d\xi d\eta d\tau \end{aligned} \quad (64)$$

Тут, у (64), введені наступні позначення для функції Гріна, а також її складових елементів:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t), \quad (65)$$

$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{1}{l} + \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi \zeta}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a_{ст.} \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{l^2}\right), \quad (66)$$

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp(-\mu_{nm} \cdot a_{ст.} \cdot t)}{(\mu_{nm}^2 \cdot R_2^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2) - (\mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1)} \quad (67)$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = I_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r), \quad (68)$$

де, $A_0=1$, $A_n=2$, при $n= 1, 2, \dots$; $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку від аргументу r ; штрих біля функції означає однократне диференціювання по аргументу функції; μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n'(\mu R_1) \cdot Y_n(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1) \cdot I_n(\mu R_2) = 0 \quad (69)$$

Випадок Б (II задача): Розглядається круговий циліндричний канал скінченної довжини. Задані наступні умови: (58) – початкова, (59)-(61) для поверхонь $\Gamma = R_1$ й $\Gamma = R_2$ й наступні умови (граничні) – для поверхонь $z = 0, z = l$ (це так звані змішані крайові задачі):

$$T_c(r, \varphi, z, t)|_{z=0} = \tilde{g}_3(r, \varphi, t), \quad (70)$$

$$T_c(r, \varphi, z, t)|_{z=l} = \tilde{g}_4(r, \varphi, t), \quad (71)$$

Розв'язок цієї задачі методом функцій Гріна [6] має вид:

$$T_{ст.}(r, \varphi, z, t) = \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{l \ 2\pi \ R_2} f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot \xi d\xi d\eta d\zeta - a_{ст.} \cdot R_1 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_1, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau + a_{ст.} \cdot R_2 \iiint_{0 \ 0 \ 0}^{t \ l \ 2\pi} g_2(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_2, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau + a_{ст.} \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{t \ 2\pi \ R_2} \tilde{g}_3(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=0} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau - a_{ст.} \iiint_{0 \ 0 \ R_1}^{t \ 2\pi \ R_2} \tilde{g}_4(\xi, \eta, \tau) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \zeta} G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t - \tau) \right]_{\zeta=l} \cdot \xi d\xi d\eta d\tau \quad (72)$$

Тут, у (72), введені наступні позначення:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \quad (73)$$

$$G_2(z, \zeta, t) = \frac{2}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \zeta}{l}\right) \cdot \exp\left(-\frac{a_{ст.} \cdot n^2 \cdot \pi^2 \cdot t}{l^2}\right), \quad (74)$$

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot Z_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp(-\mu_{nm}^2 \cdot a_{ст.} \cdot t)}{(\mu_{nm}^2 \cdot R_2^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_2) - (\mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot Z_n^2(\mu_{nm} \cdot R_1)} \quad (75)$$

$$Z_n(\mu_{nm} \cdot r) = I_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot Y_n(\mu_{nm} \cdot r) - Y_n'(\mu_{nm} \cdot R_1) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r). \quad (76)$$

де, $A_0=1$, $A_n=2$, при $n=1, 2, \dots$; $I_n(r)$ та $Y_n(r)$ – функції Бесселя та Вебера n -го порядку, відповідно; штрих біля вказаних функцій означає однократне диференціювання по аргументу цієї функції; μ_{nm} – додатні корені трансцендентного рівняння:

$$I_n'(\mu R_1) \cdot Y_n(\mu R_2) - Y_n'(\mu R_1) \cdot I_n(\mu R_2) = 0 \quad (77)$$

Отже, для випадків I-ої задачі (А+Б+В+Г+Д) та II-ої задачі (А+Б) у залежності від початкових та граничних умов знайдене поле температур стінок циліндричного каналу. Знаючи це поле $T_{ст.}(r, \varphi, z, t)$ можемо знайти температурне поле пропіленгліколю/етиленгліколю, котрий заповнює циліндричний канал. Знову використаємо метод функцій Гріна [6].

Найбільш загальний випадок щодо розрахунку температурного поля пропіленгліколю/етиленгліколю передбачає наявність теплообміну на поверхнях його контакту зі стінками циліндричного каналу (поверхня $r = R_1$) та з оточуючим середовищем на поверхнях $z = 0$ й $z = l$.

Отже, розглядається круговий циліндр скінченої довжини, тобто $0 \leq r \leq R_1$; $0 \leq z \leq l$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Це т.з. третя крайова задача. Треба розв'язати рівняння:

$$\frac{\partial T_{ер}}{\partial t} = a_{ер} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial T_{ер}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T_{пер}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T_{ер}}{\partial z^2} \right], \quad (78)$$

де, $T_{ер}(r, \varphi, z, t)$ – шукане температурне поле пропіленгліколю/етиленгліколю, розміщеного у циліндричному радіусі R_1 ; $a_{ер}$ – коефіцієнт температуропровідності пропіленгліколю/етиленгліколю; вдовж вісі Oz канал має скінчену довжину l .

На поверхні $r = R_1$ маємо таку граничну умову:

$$-\lambda_{ер} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (T_{ер.}) = h_1 \cdot (T_{ер.} - T_{ст.}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_1}) \quad (79)$$

де, $\lambda_{ер}$ – коефіцієнт теплопровідності пропіленгліколю/етиленгліколю; h_1 – коефіцієнт тепловіддачі поверхні $r = R_1$; $T_{ст.}(r, \varphi, z, t)|_{r=R_1}$ – температура поверхні $r = R_1$, яка визначена одним з семи способів (5 способів – задача I, 2-способи – задача II), наведених вище. Після нескладних перетворень умову (79) можна подати наступним чином:

$$\frac{\partial}{\partial r} (T_{\text{ер.}}) + \tilde{k}_1 \cdot T_{\text{ер.}} = \tilde{g}_1(\varphi, z, t), \tag{80}$$

де, $\tilde{k}_1 = \frac{h_1}{\lambda_{\text{ер.}}}$; $\tilde{g}_1(\varphi, z, t) = \tilde{k}_1 \cdot T_{\text{ст.}}(r, \varphi, z, t)$.

На поверхні $z = 0$ маємо таку граничну умову:

$$\lambda_{\text{ер.}} \cdot \frac{\partial}{\partial z} (T_{\text{ер.}}) = h_3 (T_{\text{ер.}} - T_{\text{сер.}}(r, \varphi, 0, t)) \tag{81}$$

де, h_3 - коефіцієнт тепловіддачі поверхні $z = 0$; $T_{\text{сер.}}(r, \varphi, 0, t)$ – температурне середовище, яке оточує циліндричний канал у площині $z = 0$ (вважаємо її відомою величиною, котра, зокрема, може дорівнювати деякій константі $\bar{T}_{\text{сер.}}(0) = \bar{T}_{\text{сер.}0}$, тобто температурі, котру досягне це середовище після “сонячного” нагрівання. Умова (81) може бути легко перетворена до наступної:

$$\frac{\partial}{\partial z} (T_{\text{ер.}}) - \tilde{k}_3 \cdot T_{\text{ер.}} = \tilde{g}_3(r, \varphi, t), \text{ при } z = 0, \tag{82}$$

де, $\tilde{k}_3 = \frac{h_3}{\lambda_{\text{пер.}}}$, $\tilde{g}_3(r, \varphi, t) = -\tilde{k}_3 \cdot T_{\text{сер.}}(r, \varphi, 0, t)$.

Аналогічно, для поверхні $z = l$, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial z} (T_{\text{ер.}}) + \tilde{k}_4 \cdot T_{\text{ер.}} = \tilde{g}_4(r, \varphi, t), \tag{83}$$

де, $\tilde{k}_4 = \frac{h_4}{\lambda_{\text{ер.}}}$; $\tilde{g}_4(r, \varphi, t) = \tilde{k}_4 \cdot T_{\text{сер.}}(r, \varphi, l, t)$; h_4 – коефіцієнт тепловіддачі поверхні $z = l$.

Початкова умова даної задачі співпадає з (59).

Розв’язок рівняння (78) за початкової умови (59) та граничних умов (81)-(83) має вид [6]:

$$\begin{aligned} T_{\text{ер.}}(r, \varphi, z, t) = & \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \xi \cdot f(\xi, \eta, \zeta) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) \cdot d\xi d\eta d\zeta + \\ & + a_{\text{ер.}} \cdot R_1 \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \tilde{g}_1(\eta, \zeta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, R_1, \eta, \zeta, t - \tau) \cdot d\eta d\zeta d\tau - \\ & - a_{\text{ер.}} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \xi \cdot \tilde{g}_3(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, 0, t - \tau) \cdot d\xi d\eta d\tau + \\ & + a_{\text{ер.}} \int_0^t \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} \xi \cdot \tilde{g}_4(\xi, \eta, \tau) \cdot G(r, \varphi, z, \xi, \eta, l, t - \tau) \cdot d\xi d\eta d\tau. \end{aligned} \tag{84}$$

У (84) введені наступні позначення:

$$G(r, \varphi, z, \xi, \eta, \zeta, t) = G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) \cdot G_2(z, \zeta, t). \tag{85}$$

$$G_2(z, \zeta, t) = \sum_{S=1}^{\infty} \frac{h_S(z) \cdot h_S(\zeta)}{\|h_S\|^2} \cdot \exp(-a_{\text{ер.}} \cdot \lambda_S^2 \cdot t), \tag{86}$$

$$\begin{cases} h_s(z) = \cos(\lambda_s \cdot z) + \frac{\tilde{k}_3}{\lambda_s} \cdot \sin(\lambda_s \cdot z), \\ \|h_s\|^2 = \frac{\tilde{k}_4}{2\lambda_s^2} \cdot \frac{(\lambda_s^2 + (\tilde{k}_3)^2)}{(\lambda_s^2 + (\tilde{k}_4)^2)} + \frac{\tilde{k}_3}{2\lambda_s^2} + \frac{l}{2} \cdot \left(1 + \frac{(\tilde{k}_3)^2}{\lambda_s^2}\right), \end{cases} \quad (87)$$

$$G_1(r, \varphi, \xi, \eta, t) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_n \cdot \mu_{nm}^2 \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot r) \cdot I_n(\mu_{nm} \cdot \xi) \cos(n \cdot [\varphi - \eta]) \cdot \exp(-\mu_{nm}^2 \cdot a_{\text{ст.}} \cdot t)}{(\mu_{nm}^2 \cdot R_1^2 + (\tilde{k}_1)^2 \cdot R_1^2 - n^2) \cdot [I_n(\mu_{nm} \cdot R_1)]^2} \quad (88)$$

Тут $A_0=1$, $A_n=2$, при $n=1, 2, \dots$; $I_n(\xi)$ – функції Бесселя n -го порядку від аргументу ξ ; μ_{nm} та λ_s – додатні корені трансцендентних рівнянь:

$$\mu \cdot I_n'(\mu R_1) + \tilde{k}_1 \cdot I_n(\mu R_1) = 0 \quad (89)$$

$$\frac{\text{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{\tilde{k}_3 + \tilde{k}_4}{(\lambda^2 - \tilde{k}_3 \cdot \tilde{k}_4)} \quad (90)$$

Інші позначення у формулах (85)-(90) введені вище.

Висновки. Розділено розрахунок нагріву теплоносія в сонячному тепловому колекторі на два етапи – нагрів від сонячної енергії стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в тепловому сонячному колекторі та нагрів пропіленгліколю/етиленгліколю в теплообміннику (циліндричному каналі). Визначено поля температур стінок теплообмінника (циліндричного каналу) в залежності від різних варіантів початкових та граничних умов. При розрахунку враховано труднощі, пов'язані зі значною нелінійністю граничних умов типу "задане поверхнєве випромінювання". Наведено 7 способів визначення температури стінки каналу, по якому рухається теплоносій в сонячному тепловому колекторі. Для семи випадків у залежності від початкових та граничних умов знайдено поле температур стінок циліндричного каналу. Розв'язки рівнянь виконано аналітично за допомогою функції Гріна.

Бібліографічний список:

1. Любарець О.П., Москвітін А.С. Вибір форми і розрахунок об'єму сезонного теплоакумулятора. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання. Випуск 20. К.: КНУБА, 2016. С. 24–38.
2. Москвітін А.С. Аналітична модель системи тепlopостачання з геліоколекторами та акумулятором теплоти. Молодий вчений. 2020. №3. С.193-198
3. Любарець О.П., Москвітін А.С. Аналіз конструкцій сезонних теплоакумуляторів для забезпечення систем гарячого водопостачання та опалення в котеджному будівництві. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання. Випуск 18. К.: КНУБА, 2015. С. 61-69.
4. Любарець О.П., Москвітін А.С. Техніко-економічне обґрунтування використання теплоакумуляуючих матеріалів для систем міжсезонного сонячного тепlopостачання. Вентиляція, освітлення та теплогазопостачання. Випуск 17. К.: КНУБА, 2014. С.115-119.

5. Askey R.A. Graphs as an aid to understanding special functions. In *Asymptotic and Computational Analysis*. CRC Press. 2020 pp. 3-33.
6. Bellman R. *Introduction to the mathematical theory of control processes: Linear equations and quadratic criteria*. Elsevier. 2016. 244p.
7. Jeffreys, Harold, and Bertha Swirles Jeffreys. *Methods of mathematical physics*. Cambridge university press. 1999. 718p.
8. Courant Richard, David Hilbert. *Methods of mathematical physics: partial differential equations*. John Wiley & Sons, 2008. 852 p.
9. Bickley W.G. *Bessel functions and formula*. Cambridge: Cambridge univ. press, 1953. 200 p.
10. Bowman, F. *Introduction to Bessel functions*. Courier Corporation. 2012. 137 p.
11. Wyld H.W., Powell, G. *Mathematical methods for physics*. CRC Press. 2020.476 p.
12. Bateman, H., Erdélyi, A. *Higher transcendental functions, volume II*. Bateman Manuscript Project) Mc Graw-Hill Book Company. 1953. 410 p.
13. Zwillinger D., Jeffrey A., eds. *Table of integrals, series, and products*. Elsevier. 2007. 1200 p.
14. Dwight H.B. *Tables of Integrals and Other Mathematical Data (4th ed.)*. New York: MacMillan. 1961. 336 p.
15. Abramowitz M., Stegun, I. A., eds. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55)*. US Government printing office. 1968. 1046 p.
16. George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy. *Special functions*. Vol. 71. Cambridge: Cambridge university press, 1999. 640 p.
17. Temme N.M. *Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics*. John Wiley & Sons. 1996. 374 p.
18. Luke, Y.L. *Mathematical functions and their approximations*. Academic Press. 2014. 568 p.
19. Hochstadt, H. *The functions of mathematical physics*. Courier Corporation. 2012. 340 p.
20. National Research Council. *Polymer Science and Engineering: The Shifting Research Frontiers*. Washington, DC: The National Academies Press. 1994. 192p. <https://doi.org/10.17226/2307>.

PhD, associate Professor **Chovniuk Yuriy**,
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,
PhD, associate Professor **Moskvitina Anna**,
Kyiv National University of Construction and Architecture

ANALYSIS OF PROPYLENE GLYCOL/ETHYLENE GLYCOL HEATING IN THE CYLINDRICAL CHANNEL OF THE SOLAR HEAT COLLECTOR

When designing solar thermal collectors, non-stationary operating conditions of the solar system are considered to determine the instantaneous heat output and temperature of the heat carriers during a given day or period. It is known that the amount of useful heat absorbed by a solar thermal collector is directly dependent on the temperature of the heat carrier at the inlet and outlet of the solar thermal collector. The calculation of the heat consumption and/or storage system also requires the

temperature of the heat carrier at the outlet of the solar collector. The heating of the heat carrier in a solar collector can be divided into two stages: heating of the walls of the heat exchanger (cylindrical channel) in a solar thermal collector by solar energy and heating of propylene glycol/ethylene glycol in the heat exchanger (cylindrical channel) of a solar thermal collector. This paper presents seven methods for determining the temperature field of the walls of the heat exchanger (cylindrical channel) of a solar thermal collector, depending on the initial and boundary conditions. The most general case for calculating the temperature field of propylene glycol/ethylene glycol moving in the heat exchanger of a solar heat collector assumes the presence of heat exchange on the surfaces of its contact with the walls of the cylindrical channel and with the environment. The calculation takes into account the difficulties associated with the significant nonlinearity of boundary conditions of the "given surface radiation" type. That is, it is taken into account that one surface of the heat exchanger channel is turned to solar radiation, and the opposite is turned to the back wall of the solar heat collector. The solution is found analytically using the method of Green's functions.

Keywords: solar thermal collector; heating of a heat carrier in a solar collector; temperature of a heat carrier in a solar collector; temperature of a heat exchanger in a solar collector; field of heat carrier temperatures in a cylindrical channel; propylene glycol; ethylene glycol.

REFERENCE:

1. Lyubarets O.P., Moskvitina A.S. Vybir formy i rozrakhunok ob'yemu sezonnoho akumulyatora teploty. Ventilation, lighting and heat supply. Vypusk. 20. K.: KNUBA, 2016. P. 24–38. {in Ukrainian}
2. Moskvitina A.S. Analitychna model' systemy teplopostachannya z heliokolektoramy ta akumulyatorom teploty. Molodyy vchenyy. 2020. №3. P.193-198. {in Ukrainian}
3. Lyubarets O.P., Moskvitina A.S. Analiz konstruktsiy sezonnykh teploakumulyatoriv dlya zabezpechennya system haryachoho vodopostachannya ta opalennya v kotedznomu budivnytstvi. Ventylyatsiya, osviltennya ta teplohapostachannya.. Vypusk 18. K.: KNUBA, 2015 P. 61-69. {in Ukrainian}
4. Lyubarets' O.P., Moskvitina A.S. Tekhniko-ekonomichne obhruntuvannya vykorystannya teploakumulyuyuchykh materialiv dlya system mizhsezonnoho sonyachnoho teplopostachannya. Ventylyatsiya, osviltennya ta teplohapostachannya. Vypusk 17. K.: KNUBA, 2014. P.115-119. {in Ukrainian}
5. Askey R.A. Graphs as an aid to understanding special functions. In Asymptotic and Computational Analysis. CRC Press. 2020 pp. 3-33. {in English}

6. Bellman R. Introduction to the mathematical theory of control processes: Linear equations and quadratic criteria. Elsevier. 2016. 244 p. {in English}
7. Jeffreys, Harold, and Bertha Swirles Jeffreys. Methods of mathematical physics. Cambridge university press. 1999. 718 p. {in English}
8. Courant Richard, David Hilbert. Methods of mathematical physics: partial differential equations. John Wiley & Sons, 2008. 852 p. {in English}
9. Bickley W.G. Bessel functions and formula. Cambridge: Cambridge univ. press, 1953. 200 p. {in English}
10. Bowman, F. Introduction to Bessel functions. Courier Corporation. 2012. 137 p. {in English}
11. Wyld H.W., Powell, G. Mathematical methods for physics. CRC Press. 2020. 476 p. {in English}
12. Bateman, H., Erdélyi, A. Higher transcendental functions, volume II. Bateman Manuscript Project) Mc Graw-Hill Book Company. 1953. 410 p. {in English}
13. Zwillinger D., Jeffrey A., eds. Table of integrals, series, and products. Elsevier. 2007. 1200 p. {in English}
14. Dwight H.B. Tables of Integrals and Other Mathematical Data (4th ed.). New York: MacMillan. 1961. 336 p. {in English}
15. Abramowitz M., Stegun, I. A., eds. Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables (Vol. 55). US Government printing office. 1968. 1046 p. {in English}
16. George E. Andrews, Richard Askey, Ranjan Roy. Special functions. Vol. 71. Cambridge: Cambridge university press, 1999. 640 p. {in English}
17. Temme N.M. Special functions: An introduction to the classical functions of mathematical physics. John Wiley & Sons. 1996. 374 p. {in English}
18. Luke, Y.L. Mathematical functions and their approximations. Academic Press. 2014. 568 p. {in English}
19. Hochstadt, H. The functions of mathematical physics. Courier Corporation. 2012. 340 p. {in English}
20. National Research Council. Polymer Science and Engineering: The Shifting Research Frontiers. Washington, DC: The National Academies Press. 1994. 192 p. <https://doi.org/10.17226/2307>. {in English}