DOI: 10.32347/2076-815x.2023.84.392-406
УДК 621.66

к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,
к. т. н., доцент **Приймаченко О.В.**,
pryimachenko.ov@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0001-5125-8472,
доцент **Чередніченко П.П.**,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,
Шудра Н.С., Shudra_n@ukr.net, ORCID: 0000-0001-5416-7680,
Київський Національний університет будівництва та архітектури

АНАЛІТИЧНЕ ОБҐРУНТУВАННЯ ВИЗНАЧЕННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ ХАРАКТЕРИСТИК РОТОРНИХ СИСТЕМ МІСТОБУДІВЕЛЬНИХ КРАНІВ

Присвячено актуальній проблемі аналітичного обґрунтування визначення інтегральних характеристик роторних систем містобудівельних кранів, знання котрих необхідне для проведення подальшого балансування їх роторів на вибігу (чи у процесі пуску). Це дозволяє відмовитись від використання контактних вібраційних давачів та іншої спеціальної апаратури задля моніторингу процесу балансування. Крім того, виникає можливість оптимізації рушійного моменту (у процесі пуску) та гальмівного моменту при вибігу роторної системи. Мета роботи полягає у розробці алгоритму визначення інтегральних характеристик роторної системи при пуску/вибігу за спеціального співвідношення коефіцієнтів моментів – складових сумарного моменту опору обертанню. Використані підходи та моделі математичної фізики та класичного варіаційного числення. Отримані у роботі результати стануть у нагоді для уточнення й вдосконалення інженерних методів розрахунку роторних систем будівельних/містобудівельних кранів, працюючих у перехідних режимах (пуск, вибіг, реверс тощо), як на стадіях їх проектування, так і в режимах реальної експлуатації.

Ключові слова: аналітичний підхід; обґрунтування; інтегральні характеристики руху; роторні системи; містобудівельні крани; пуск; вибіг; оптимізація; кінематично-силові параметри.

Постановка проблеми. Розробка нових, більш надійних, уточнених та обґрунтованих підходів до проведення балансування роторних систем містобудівних кранів повинна базуватись на вимірюваннях найбільших простих, ніж параметри коливань опор, опосередкованих величин. У плані

вимірювання й подальшої обробки залежностей найбільш простими величинами є кут повороту ротора містобудівного крана $\varphi(t)$ та його похідні: кутова швидкість
$\omega(t)$, прискорення обертання (при пуску) чи сповільнення обертання (при вибігу) – $\varepsilon(t)$. Якщо здійснювати вимірювання при пуску/вибігу ротора, тоді можна за один пуск/вибіг отримати достатню кількість точок (умов) за час t для визначення поточних параметрів самої роторної системи містобудівельних кранів. Це, у свою чергу, дозволяє перейти до вирішення задачі балансування ротора з одночасним моніторингом стану його основних елементів. Таким чином, задачі балансування та моніторингу при пуску (або на вибігу) виявляються взаємно зв'язаними, тому актуальність даної роботи полягає у аналітичному обґрунтуванні визначення перерахованих вище інтегральних характеристик роторних систем містобудівельних кранів, знання котрих необхідне для проведення подальшого балансування вказаних роторів при пуску (на вибігу). Крім того, саме такий підхід дозволяє аналітичним шляхом визначити умови та закони руху роторних систем, працюючих в режимах пуску, за яких ефективні моменти обертання приймають оптимальні (мінімальні) значення й дозволяють створювати умови функціонування містобудівних кранів у енергоощадних режимах.

Аналіз публікацій по темі дослідження. Відомо два основних сучасних уточнених способи при виробництві балансування роторних систем (зокрема, й містобудівельних кранів) [1]: а) внесення коригуючих мас (дебалансів) й спеціальна обробка цапф ротора у місці контакту їх з опорними підшипниками. Реакція балансуючої (досліджуваної) роторної системи визначається за допомогою вібродавачів, котрі дозволяють експериментально визначити вібраційне переміщення, швидкість чи прискорення/сповільнення опор ротора кранової системи. Слід зазначити, що чіткі рекомендації щодо застосування типів цих контактних вібродавачів у спеціальній літературі [1,2] відсутні. Інколи, переходячи до інших більш простих видів проведення опосередкованих вимірювань при балансуванні роторних систем, можливим є використання вибігу. У [3], наприклад, розглянуте балансування ротора на вибігу, але при обов'язковому проходженні системою резонансної швидкості. Останнє, зрозуміло, пов'язано з підсиленням ефекту дії вимушеної сили (добуток дебаланса та квадрату кутової швидкості, що створює збурення у роторній системі) при проходженні системою резонансної частоти. Величиною, яка вимірюється при пуску цього процесу, тут знову є більш яскраво виражена амплітуда коливань опори ротора.

Як зазначають автори [6], відмова від використання контактних вібродавачів дозволяє спростити проведення опосередкованих вимірювань при одночасному ускладненні розрахунків, які проводяться, й отримання більш «об'ємних» сумарних (таких, що відображають вплив зміни швидкості обертання), а не поточних, величин-характеристик роторної системи (містобудівельного крана) при фіксованому значенні ω.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні та розробці алгоритму інтегральних характеристик роторної системи містобудівельних кранів, працюючих у режимах пуску/на вибігу за спеціального співвідношення коефіцієнтів моментів-складових сумарного моменту опору обертання, а також у встановленні умов та законів руху роторної системи, які мінімізують ефективний діючий момент сили в робочих (перехідних) режимах руху.

Виклад основного змісту дослідження.

1.Перехідний режим пуску роторної системи містобудівельного крана. Другий закон Ньютона для прискорення обертального руху ротора містобудівельного крана – на стадії пуску має вид:

$$I \cdot \varepsilon = M_{руш.} - M_{опору} = M_{eff}\ , \tag{1}$$

де: I – момент інерції ротора; $M_{руш.}$ – рушійний момент пуску кранової системи (її роторної частини); $M_{опору}$ – сумарний момент опору обертанню. Будемо вважати, що на стадії пуску роторної системи крану $M_{руш.} = const$. Сумарний момент опору можна подати у наступному виді:

$$M_{опору} = \mu \cdot \omega^2 + \nu \cdot \omega + M\ , \tag{2}$$

де: μ – коефіцієнт вентиляторного моменту; M – постійна складова моменту опору обертанню; $\varepsilon = d\omega / dt$ – прискорення обертання; ω – кругова/колова частота обертання; t – час; ν – коефіцієнт лінійної складової (за ω) (лінійного моменту опору обертання, що дорівнює $\nu \cdot \omega$); M – постійна складова або гравітаційний момент, який можна подати наступним співвідношенням:

$$M = (r_П \cdot f) \cdot G_р\ , \tag{3}$$

де: $G_р$ – сила тяжіння ротора; $(r_П \cdot f)$ – фрикційна характеристика роторної системи крану. Зазначимо, що вентиляторний момент опору обертання ротора $\left(M_W \equiv \mu \cdot \omega^2\right)$ прийнято у літературі називати інерційним та вентиляторним моментом M_W [6].

Отже, враховуючи співвідношення (1-3), рівняння руху роторної системи містобудівельного крану на етапі пуску (розгону) приймає наступний вид:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{руш.} - \mu \cdot \omega^2 - \nu \cdot \omega - M = M_{руш.} - \mu \cdot \omega^2 - \nu \cdot \omega - (r_П \cdot f) \cdot G_р\ . \tag{4}$$

Рівняння (4) можна проінтегрувати по t за наступних початкової (t=0) й термінальної ($t = t_П$, де $t_П$ – тривалість пуску роторної системи, тобто це відрізок часу після закінчення котрого роторна система крану переходить у штатний режим функціонування, а частота обертання ротору ω досягає свого номінального значення $\omega_{ном.}$) умов:

$$\omega/_{t=0}=0; \quad \omega/_{t=t_П}=\omega_{ном.} \tag{5}$$

Тоді перший інтеграл диференціального рівняння (4) має вид рівняння з розділеними змінними:

$$I\cdot\frac{d\omega}{dt}=M_{руш.}-(r_П\cdot f)\cdot G_p-\mu\cdot\omega^2-\nu\cdot\omega, \tag{6}$$

або:

$$I\cdot\int_0^{\omega_{ном.}}\frac{d\omega}{\left[\left\{M_{руш.}-(r_П\cdot f)\cdot G_p\right\}-\mu\cdot\omega^2-\nu\cdot\omega\right]}=\int_0^{t_П}dt=t_П-0=t_П\ . \tag{7}$$

Зі співвідношення (7) можна знайти аналітичним шляхом величину $t_П$, якщо відома величина $\omega_{ном.}$ та інші вихідні характеристики роторної системи містобудівельного крана ($M_{руш.}$, $(r_П\cdot f)$, G_p, μ, ν):

$$t_П=I\cdot\int_0^{\omega_{ном.}}\frac{d\omega}{\left\{\left[M_{руш.}-(r_П\cdot f)\cdot G_p\right]-\mu\cdot\omega^2-\nu\cdot\omega\right\}}=I\cdot\int_0^{\omega_{ном.}}\frac{d\omega}{\left\{M^*-\mu\cdot\omega^2-\nu\cdot\omega\right\}}, \tag{8}$$

де: $M^*=M_{руш.}-(r_П\cdot f)\cdot G_p$.

Загальний розв'язок (6), який встановлює залежність $t(\omega)$ у режимі пуску роторної системи крану, можна подати (з урахуванням початкової умови (5)) у наступному виді:

$$t(\omega)=I\cdot\left[-F(\mu,\nu,M^*)+F(\mu,\nu,M^*,\omega)\right], \tag{9}$$

де у залежності від співвідношення коефіцієнтів μ, ν, M^* й величини дискримінанта $\Delta=-4\mu\cdot M^*-\nu^2<0$ первісна приймає наступне значення:

$$F(\mu,\nu,M^*,\omega)=\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot arctg\left\{\frac{\nu+2\mu\cdot\omega}{\sqrt{-\Delta}}\right\}. \tag{10}$$

Тому з урахуванням (8)-(10) (й коригуванням формул, отриманих з помилковими коефіцієнтами для первісної у [6]), для $t_П$ маємо:

$$t_П=\frac{2I}{\sqrt{-\Delta}}\cdot\left\{arctg\left[\frac{\nu+2\mu\cdot\omega_{ном.}}{\sqrt{-\Delta}}\right]-arctg\left[\frac{\nu}{\sqrt{-\Delta}}\right]\right\}. \tag{11}$$

З'ясуємо далі умови, за яких можлива оптимізація (мінімізація) M_{eff} (ефективного моменту сили, який забезпечує обертальний рух роторної системи містобудівельного крана, котрий функціонує в режимі пуску), а також визначаємо закони руху $\varphi(t)$, $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$, за яких це можливо.

Розглянемо наступне диференціальне рівняння:

$$I\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2}=M_{руш.}-M_{опору}=M_{eff}, \tag{12}$$

де вважатимемо, що $M_{руш.} = const$, а $M_{опору} \equiv M$ і визначається за співвідношенням (3), тобто теж є постійною величиною, незалежною від t.

Визначимо при зазначених вище припущеннях закони руху роторної системи містобудівельного крана, які задовольняють наступному критерію якості:

$$I = \left\{ \frac{1}{t_П} \cdot \int_0^{t_П} \left(M_{eff} \right)^2 dt \right\}^{1/2} \to min. \qquad (13)$$

Враховуючи (12), критерій якості руху роторної системи містобудівельного крану можна подати у наступному виді:

$$I = \left\{ \frac{1}{t_П} \cdot I^2 \cdot \int_0^{t_П} \left(d^2\varphi \Big/ dt^2 \right)^2 dt \right\}^{1/2} \to min. \qquad (14)$$

Необхідною умовою досягнення критерію якості обертального руху роторної системи крану (14) є умова – диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона для функції $\varphi(t)$ виду:

$$\varphi^{(IV)}(t) = 0. \qquad (15)$$

Розв'язок рівняння (15) шукаємо у вигляді сплайна третього порядку по часу t:

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 \cdot t^1 + a_2 \cdot t^2 + a_3 \cdot t^3, \qquad (16)$$

де константи (a_0, a_1, a_2, a_3) знаходимо з наступних початкових та термінальних умов руху роторної системи:

$$\varphi(t)/_{t=0} = 0; \quad \frac{d\varphi(t)}{dt} \Big/_{t=0} = \dot{\varphi}(t)/_{t=0} = 0; \text{ C};$$

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} \Big/_{t=t_П} = \dot{\varphi}(t)/_{t=t_П} = \omega_{ном.} \qquad (17)$$

Враховуючи запис $\varphi(t)$ у вигляді (16) та умови (17), можна легко одержати:

$$a_0 = 0; \qquad a_1 = 0; \qquad 2a_2 = \frac{\left(M_{руш.} - M \right)}{I};$$

$$a_3 = \frac{\omega_{ном.} - 2a_2 \cdot t_П}{3 \cdot t_П^2} = \left\{ \omega_{ном.} - \left[\frac{\left(M_{руш.} - M \right)}{I} \cdot t_П \right] \right\} \Big/ \left(3 \cdot t_П^2 \right). \qquad (18)$$

Отже, закон руху $\varphi(t)$, який задовольняє критерію якості I (13), (14), має наступний вид:

$$\varphi(t)=\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{2I}\cdot t^2+\left\{\omega_{ном.}-\left[\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t_П\right]\right\}\cdot\frac{t^3}{\left(3t_П^2\right)}. \quad (19)$$

Звідси для $\varphi(t)$ маємо:

$$\varphi(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t+\left\{\omega_{ном.}-\left[\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t_П\right]\right\}\cdot\frac{t^2}{t_П^2}. \quad (20)$$

Для $\varepsilon(t)$ можна з (20) легко отримати:

$$\varepsilon(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}=\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t+2\cdot\left\{\omega_{ном.}-\left[\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t_П\right]\right\}\cdot\frac{t}{t_П^2}. \quad (21)$$

Для різкості обертального руху матимемо:

$$r(t)=\frac{d\varepsilon(t)}{dt}=\frac{d^3\varphi(t)}{dt^3}=2\cdot\left\{\omega_{ном.}-\left[\frac{\left(M_{руш.}-M\right)}{I}\cdot t_П\right]\right\}\cdot\frac{1}{t_П^2} \quad (22)$$

Слід зазначити, що закони руху роторної системи (19)-(22) можна реалізувати, використовуючи сучасні мехатронні системи управління та високочутливі сенсори.

2. Перехідний режим вибігу роторної системи містобудівельного крана.

Другий закон Ньютона для сповільненого обертального руху ротора за інерцією - на вибігу – має вид [6]:

$$I\cdot\varepsilon=I\cdot\frac{d\omega}{dt}=-\left[\mu\cdot\omega^2+\nu\cdot\omega+M\right]. \quad (23)$$

У більш загальному випадку для вимушеного сповільнення обертального руху роторної системи містобудівельного крана – у режимі вибігу – маємо наступне диференціальне рівняння руху:

$$I\cdot\varepsilon=I\cdot\frac{d\omega}{dt}=-\left[\mu\cdot\omega^2+\nu\cdot\omega+\widetilde{M}\right], \quad (24)$$

де: $\widetilde{M}=M+M_{гальм}$, $M_{гальм}$ – додатковий гальмівний момент, який створюється спеціальним гальмівним пристроєм задля якнайшвидшого гальмування роторної системи крана.

Будемо у подальшому розглядати саме рівняння (24), для якого по аналогії з пунктом 1 даного дослідження, й з урахуванням виправлення помилок, наявних у роботі [6], маємо перший інтеграл диференціального рівняння (24) наступного виду:

$$I\cdot\int_{\omega_{ном.}}^{0}\frac{d\omega}{-\left[\mu\omega^2+\nu\omega+\widetilde{M}\right]}=\int_0^{t_{ПВ}}dt=t_{ПВ}-0=t_{ПВ}, \quad (25)$$

де: $t_{ПВ}$ – повна тривалість у часі вибігу роторної системи. Використовуючи властивості визначених інтегралів, можна подати (25) таким чином:

$$t_{ПВ} = I \cdot \int_{0}^{\omega_{ном.}} \frac{d\omega}{\left[\mu \cdot \omega^2 + \nu \cdot \omega + \widetilde{M}\right]} \tag{26}$$

Введемо для інтегралу позначення первісної $\widetilde{F}$, тоді можна записати, із урахуванням початкової умови $\omega/_{t=0} = \omega_{ном.}$, загальний розв'язок:

$$t(\omega) = +I \cdot \left[\widetilde{F}(\mu,\nu,\widetilde{M},\omega_{ном.}) - \widetilde{F}(\mu,\nu,\widetilde{M},\omega)\right], \tag{27}$$

де у залежності від співвідношення коефіцієнтів $\mu,\nu,\widetilde{M}$ й величини дискримінанта $\widetilde{\Delta} = 4\mu \cdot \widetilde{M} - \nu^2$ первісна приймає одне з чотирьох значень:

$$\widetilde{F}(\mu,\nu,\widetilde{M},\omega) = \begin{cases} \dfrac{\omega}{\widetilde{M}}, & при \quad \mu = 0,\ \nu = 0,\ \widetilde{\Delta} = 4\mu \cdot \widetilde{M} - \nu^2 = 0; \\ \dfrac{(-2)}{\nu + 2\mu \cdot \omega}, & при \quad \widetilde{\Delta} = 0,\ \mu + \nu \neq 0; \end{cases} \tag{28(а)}$$

$$\widetilde{F}(\mu,\nu,\widetilde{M},\omega) = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}} \cdot arctg\left(\dfrac{\nu + 2\mu\omega}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}}\right), & при \quad \widetilde{\Delta} > 0; \\ \dfrac{2}{\sqrt{-\widetilde{\Delta}}} \cdot arctg\left(\dfrac{\nu + 2\mu\omega}{\sqrt{-\widetilde{\Delta}}}\right), & при \quad \widetilde{\Delta} < 0. \end{cases} \tag{28(б)}$$

У даному дослідженні розглянемо далі варіант $\widetilde{\Delta} > 0$, який відповідає умові $\widetilde{\Delta} = 4\mu \cdot \widetilde{M} - \nu^2 > 0$. Сподіваємось, що варіант $\widetilde{\Delta} < 0$, який тут не розглядається, не буде принципово відрізнятись від запропонованого $(\widetilde{\Delta} > 0)$.

Отримання розв'язків розглядуваних диференціальних рівнянь не представляє собою ніякої принципово складної процедури.

Отже, для випадку $\widetilde{\Delta} = 4\mu \cdot \widetilde{M} - \nu^2 > 0$ маємо наступні аналітичні вирази шуканих законів та характеристик руху роторної системи містобудівельного крану на етапі вибігу, які представлені нижче.

Вихідний інтеграл:

$$\widetilde{F}(\mu,\nu,\widetilde{M},\omega) = \int \frac{Id\omega}{\left[\mu\omega^2 + \nu \cdot \omega + \widetilde{M}\right]} = \frac{2I}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}} \cdot arctg\left(\frac{\nu + 2\mu\omega}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}}\right) + C, \tag{29}$$

де C – невизначена константа. (Її значення можна знайти, виходячи з початкових умов задачі).

Перший інтеграл диференціального рівняння (24) має наступний вид;

$$t(\omega) = \frac{2I}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}} \cdot arctg\left\{\frac{(\omega_{ном.} - \omega) \cdot \sqrt{\widetilde{\Delta}}}{2\widetilde{M} + \nu \cdot \omega_{ном.} + (2\mu \cdot \omega_{ном.} + \nu) \cdot \omega}\right\}. \tag{30}$$

Тривалість повного вибігу роторної системи складає:

$$t_{ПВ} = \frac{2I}{\sqrt{\widetilde{\Delta}}} \cdot arctg\left\{\frac{\omega_{ном.} \cdot \sqrt{\widetilde{\Delta}}}{2\widetilde{M} + \nu \cdot \omega_{ном.}}\right\}. \tag{31}$$

Закон зміни в часі швидкості обертання:

$$\omega(t)=\frac{\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2\mu}\cdot tg\left\{arctg\left(\frac{\nu+2\mu\omega_{ном.}}{\sqrt{\tilde{\Delta}}}\right)-\frac{t\cdot\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2\cdot I}\right\}-\frac{\nu}{2\mu}. \tag{32}$$

(При перевірці формули (32) дійсно, при $t=t_{ПВ}$, $\omega(t)\big/_{t=t_{ПВ}}=0$).

Другий інтеграл диференціального рівня (24) визначає у часі закон зміни $\varphi(t)$:

$$\varphi(t)=\frac{I}{\mu}\cdot ln\left\{cos\left[Z-\frac{\sqrt{\tilde{\Delta}}}{2I}\cdot t\right\}\cdot cos^{-1}[Z]-\frac{\nu}{2\mu}\cdot t, \tag{33}$$

де: $Z=arctg\left\{\frac{2\mu\cdot\omega_{ном.}+\nu}{\sqrt{\tilde{\Delta}}}\right\}$.

Кут повороту (φ) у залежності від швидкості обертання:

$$\varphi(\omega)=\frac{I}{2\mu}\cdot\left\{ln\left(\frac{\mu\cdot\omega_{ном.}^2+\nu\cdot\omega_{ном.}+\tilde{M}}{\mu\cdot\omega^2+\nu\cdot\omega+\tilde{M}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\nu}{\sqrt{\tilde{\Delta}}}\cdot arctg\left[\frac{2\mu\cdot(\omega_{ном.}-\omega)\cdot\sqrt{\tilde{\Delta}}}{\tilde{\Delta}+(\nu+2\mu\cdot\omega)(\nu+2\mu\cdot\omega_{ном.})}\right]\right\}$$

(34)

Кут повного вибігу роторної системи містобудівного крану складає:

$$\varphi(t_{ПВ})=\varphi_{ПВ}-\varphi(0)=\frac{I}{2\mu}\cdot\left\{ln\left(\frac{\mu\cdot\omega_{ном.}^2+\nu\cdot\omega_{ном.}+\tilde{M}}{\tilde{M}}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{2\nu}{\sqrt{\tilde{\Delta}}}\cdot arctg\left[\frac{\omega_{ном.}\cdot\sqrt{\tilde{\Delta}}}{\nu\cdot\omega_{ном.}+2\tilde{M}}\right]\right\}. \tag{35}$$

Чисельні розрахунки на ПЕОМ були проведені для наступних вихідних даних (модельна задача):

$I=700кг\cdot м^2$; $\tilde{M}=23Н\cdot м$; $\mu=2кг\cdot м^2$; $\nu=10кг\cdot м^2/c$; $\tilde{\Delta}=84\left(кг\cdot м^2/c\right)^2$; $t(0)=t_0=0c$; $\varphi(0)=\varphi_0=0рад$;

При таких вихідних даних $t_{ПВ}=112{,}625$ c, а кут повного вибігу роторної системи крана $\varphi_{ПВ}=1468рад=233{,}639$ $об$.

Швидкість обертання у залежності від часу подана на рисунку 1 і є типовою гіперболічною залежністю, тобто $\omega(t)\sim A/t$, де $t-$ час, $A=const>0$.

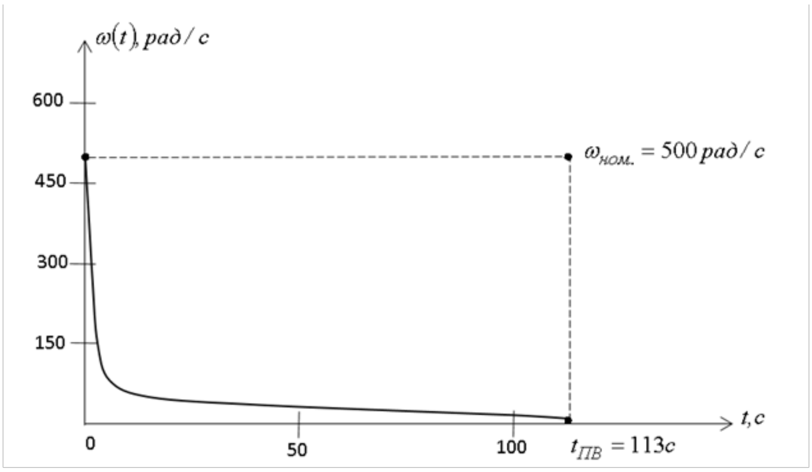

Рис. 1. Швидкість обертання (ω) у залежності від часу (t).

Кут повороту ротора кранової системи у залежності від часу $\varphi(t)$ поданий на рисунку 2 й представляє типову логарифмічну залежність з екстремумом (max) у точці $(\varphi_{ПВ}; t_{ПВ})$.

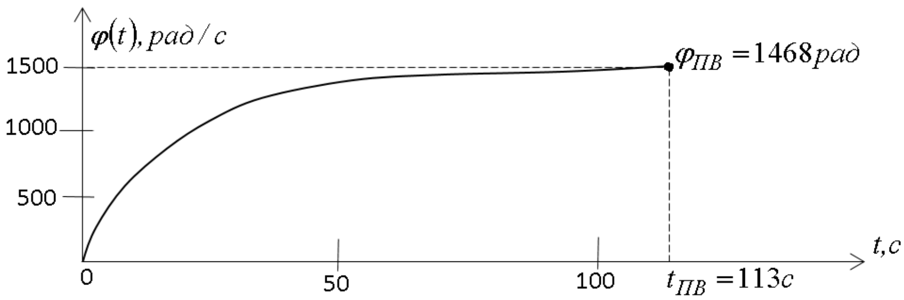

Рис. 2. Залежність кута повороту ротора (φ) від часу (t).

Кут повороту ротора (φ) кранової системи у залежності від швидкості обертання (ω) поданий на рисунку 3 і представляє типову гіперболічну залежність з екстремумом (max) у точці $(\varphi_{ПВ}; 0)$.

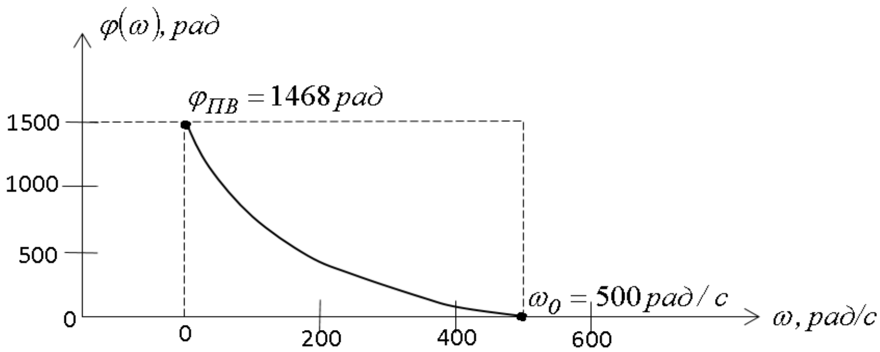

Рис. 3. Залежність кута повороту ротора (φ) від швидкості обертання (ω).

3. Оптимізація режиму руху містобудівельних кранів (їх роторної системи) за іншими критеріями якості на етапі пуску.

Узагальнемо диференціальне рівняння (4) на випадок, коли $M_{руш.} = M_{руш.}(t)$. Оскільки $\omega = \omega(t)$ на етапі пуску роторної системи крану, тоді можна $M_{eff}(t)$ визначити наступним чином:

$$M_{eff}(t) = M_{руш.}(t) - \mu \cdot [\omega(t)]^2 - \nu \cdot \omega(t) - (r_П \cdot f) \cdot G_p . \tag{36}$$

Тоді вихідне диференціальне рівняння руху роторної системи набуває виду:

$$I \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_{eff}(t).$$

(37)

Вважаємо, що $M_{eff}(t)$ є диференційованою по t функцією. Продиференціюємо (37) зліва і справа по t, тоді матимемо:

$$I \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(M_{eff}(t)\right). \tag{38}$$

Знайдемо умови і закони руху роторної системи, за яких виконується критерій якості:

$$I_2 = \left[\frac{1}{t_П} \cdot \int_0^{t_П} \left\{ \frac{d}{dt}\left(M_{eff}(t)\right) \right\}^2 dt \right]^{1/2} \Rightarrow min . \tag{39}$$

Використовуючи рівняння (38) критерій I_2 (39) можна подати у вигляді:

$$I_2 = \left[\frac{1}{t_П} \cdot \int_0^{t_П} \left\{ \frac{d}{dt}\left(M_{eff}(t)\right) \right\}^2 dt \right]^{1/2} = \left[\frac{1}{t_П} \cdot \int_0^{t_П} \left(I \cdot \frac{d^2\omega}{dt^2} \right) dt \right]^{1/2} \Rightarrow min . \tag{40}$$

Зрозуміло, що величина $t_П$ в (39) та (40) повинна визначатись за формулою (11).

Необхідною умовою реалізації критерію якості руху роторної системи містобудівельного крана I_2 (40), як, до речі, й I_2 (39) є диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона:

$$\omega^{(IV)}(t) = 0 . \tag{41}$$

Будемо шукати $\omega(t)$ у вигляді сплайну по t третього порядку, який задовольняє (41):

$$\omega(t) = b_0 + b_1 \cdot t^1 + b_2 \cdot t^2 + b_3 \cdot t^3 , \tag{42}$$

де константи (b_0, b_1, b_2, b_3) розшукуємо, виходячи з наступних початкових і термінальних умов:

$$\begin{cases} \omega(t)/_{t=0} = 0; \dot{\omega}(t)/_{t=0} = \dfrac{d\omega(t)}{dt}\Big/_{t=0} = \dfrac{M_{eff}(t)}{I}\Big/_{t=0} = \dfrac{M_{eff}(0)}{I} = \dfrac{\lfloor M_{руш.}(0) - (r_П \cdot f) \cdot G_p \rfloor}{I} \\ \omega(t)/_{t=t_П} = \omega_{ном}; \dot{\omega}(t)/_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (43)$$

Враховуючи запис $\omega(t)$ у формулі (42), легко знайти всі коефіцієнти b_0, b_1, b_2, b_3:

$$b_0 = 0;\ b_1 = \left(M_{руш.}(0) - (r_П \cdot f) \cdot G_p\right) \cdot I^{-1}, \quad (44)$$

а константи b_2 та b_3 знаходимо з наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} b_1 \cdot t_П + b_2 \cdot t_П^2 + b_3 \cdot t_П^3 = \omega_{ном.}; \\ b_1 + 2b_2 \cdot t_П + 3b_3 \cdot t_П^2 = 0. \end{cases} \quad (45)$$

Система рівнянь (45) відносно невідомих b_2 та b_3 може після нескладних перетворень бути поданою у наступному виді:

$$\begin{cases} b_2 \cdot t_П^2 + b_3 \cdot t_П^3 = \omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П; \\ 2b_2 \cdot t_П + 3b_3 \cdot t_П^2 = -b_1. \end{cases} \quad (46)$$

Зрозуміло, що коефіцієнт b_1 визначається зі співвідношення (44). Використовуючи правило Крамера, система рівнянь (46) відносно невідомих b_2 та b_3 легко розв'язати. Тоді матимемо:

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{\Delta b_2}{det};\ \ b_3 = \dfrac{\Delta b_3}{det};\ \ det = t_П^4; \\ \Delta b_2 = (\omega_{ном.} - b_1 \cdot t) \cdot 3 \cdot t_П^2 + b_1 \cdot t_П^3; \\ \Delta b_3 = t_П^2 \cdot (-b_1) - 2 \cdot t_П \cdot (\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П). \end{cases} \quad (47)$$

Тому, для коефіцієнтів b_2 та b_3 маємо:

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{(\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П) \cdot 3 \cdot t_П^2 + b_1 \cdot t_П^3}{t_П^4} = \dfrac{(\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П) \cdot 3 + b_1 \cdot t_П}{t_П^4}; \end{cases} \quad (48)$$

$$\begin{cases} b_2 = \dfrac{(\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П) \cdot 3 \cdot t_П^2 + b_1 \cdot t_П^3}{t_П^4} = \dfrac{(\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П) \cdot 3 + b_1 \cdot t_П}{t_П^4} \\ b_3 = \dfrac{t_П^2 \cdot (-b_1) - 2 \cdot t_П \cdot (\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П)}{t_П^4} = \dfrac{t_П \cdot (-b_1) - 2 \cdot (\omega_{ном.} - b_1 \cdot t_П)}{t_П^3} \end{cases} \quad (49)$$

Отже, співвідношення (42), (44), (48), (49) визначають $\omega(t)$, яке задовольняє критерію якості руху I_2 (39), (40), а також початковим та термінальним умовам (43):

$$\omega(t)=b_1\cdot t+b_2\cdot t^2+b_3\cdot t^3 . \qquad (50)$$

Кутове прискорення $\varepsilon = d\omega/dt$ має при цьому наступний вигляд (як функція часу t, тобто $\varepsilon(t)$):

$$\varepsilon(t)=b_1+2b_2\cdot t+3b_3\cdot t^2 . \qquad (51)$$

Різкість обертального руху роторної системи крана $r(t)=\dfrac{d\varepsilon(t)}{dt}$ визначається наступним чином:

$$r(t)=2b_2+6b_3\cdot t . \qquad (52)$$

Для $d^3\omega/dt^3=\dfrac{dr(t)}{dt}$ маємо:

$$\frac{d^3\omega}{dt^3}=6b_3 , \qquad (53)$$

а $\omega^{(IV)}(t)=0$, виходячи зі співвідношення (53).

Для отримання закону руху для кута обертання роторної системи $\varphi(t)$ слід вираз (50) один раз проінтегрувати по t при дотриманні початкової умови $\varphi(t)/_{t=0}=\varphi_0$. Маємо:

$$\varphi(t)=\varphi_0+b_1\cdot\frac{t^2}{2}+b_2\cdot\frac{t^3}{3}+b_3\cdot\frac{t^4}{4} . \qquad (54)$$

Якщо згадати, що $\omega(t)=d\varphi(t)/dt$, тоді можна встановити закон руху $\varphi(t)$, за якого виконуються критерії якості обертального руху роторної системи містобудівельного крана у формі I_2 (39), (40), але необхідна умова реалізації котрою є вже рівняння Ейлера-Пуассона для $\varphi(t)$:

$$\varphi^{(IV)}(t)=0 . \qquad (55)$$

$\varphi(t)$ розшукуємо у вигляді сплайну п'ятого порядку по t наступного виду:

$$\varphi(t)=c_0+c_1\cdot t+c_2\cdot t^2+c_3\cdot t^3+c_4\cdot t^4+c_5\cdot t^5 . \qquad (56)$$

де константи $(c_0,c_1,c_2,c_3,c_4,c_5)$ знаходимо, виходячи з наступних початкових та термінальних умов (пуску):

$$\begin{cases}\varphi(t)/_{t=0}=\varphi_0;\ \dot\varphi(t)/_{t=0}=\dfrac{d\varphi(t)}{dt}\Big/_{t=0}=0;\ \ddot\varphi(t)/_{t=0}=\dfrac{d^2\varphi(t)}{dt^2}\Big/_{t=0}=\dfrac{M_{eff}(0)}{I};\\ \varphi(t)/_{t=t_\Pi}=\varphi_\Pi;\ \dot\varphi/_{t=t_\Pi}=\omega_{ном.};\ \ddot\varphi/_{t=t_\Pi}=0.\end{cases} \qquad (57)$$

(При цьому t_Π знову знаходимо зі співвідношення (11)). Підставляючи співвідношення (57) у (56) матимемо:

$$c_0=\varphi_0;\ c_1=0;\ 2c_2=\frac{M_{eff}(0)}{I}, \qquad (58)$$

а для констант $c_{3,}c_4,c_5$ маємо наступну систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь, (яка легко розв'язується за правилом Крамера):

$$\begin{cases} c_3 \cdot t_\Pi^3 + c_4 \cdot t_\Pi^4 + c_5 \cdot t_\Pi^5 = -c_0 - c_2 \cdot t_\Pi^2; \\ 3c_3 \cdot t_\Pi^2 + 4c_4 \cdot t_\Pi^3 + 5c_5 \cdot t_\Pi^4 = -2c_2 \cdot t_\Pi; \\ 6c_3 \cdot t_\Pi + 12c_4 \cdot t_\Pi^2 + 20c_5 \cdot t_\Pi^3 = -2c_2. \end{cases} \quad (59)$$

Знаючи коефіцієнти c_i, $i = (1,5)$ та c_0 з (58) розв'язку системи лінійних алгебраїчних рівнянь (59) можемо встановити закони $\omega(t)$, $\varepsilon(t)$, $r(t)$:

$$\omega(t) = 2c_2 t + 3 \cdot c_3 \cdot t^2 + 4 \cdot c_4 \cdot t^3 + 5 \cdot c_5 \cdot t^4; \quad (60)$$

$$\varepsilon(t) = 2c_2 + 6 \cdot c_3 \cdot t + 12 \cdot c_4 \cdot t^2 + 20 \cdot c_5 \cdot t^3; \quad (61)$$

$$r(t) = 6c_3 + 24 \cdot c_4 \cdot t + 60 \cdot c_5 \cdot t^2. \quad (62)$$

Висновки. 1. Розроблений та обґрунтований алгоритм визначення основних характеристик роторної системи містобудівельних кранів на етапах пуску та вибігу.

2. Встановлені закони руху роторної системи, які оптимізують (мінімізують) ефективний момент, діючий у вказаній системі та швидкість зміни його у часі на етапі пуску (системи).

3. Отримані у даній роботі результати можуть бути у подальшому використанні для уточнення й вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку режимів руху роторних систем містобудівельних кранів та їх основних інтегрувальних характеристик на етапах пуску/вибігу, а також задля оптимізації мехатронних систем управління вказаними рухами й забезпечення енергоощадних режимів їх функціонування як на стадіях проектування, так і у режимах реальної експлуатації.

Список літератури:

1. Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания. – М.: ГИФМЛ, 1960. 580 с.

2. Гольдин А.С. Вибрации роторных машин. – М.: Машиностроение, 2000. 344 с.

3. Левит М.Е. Справочник по балансировке. – М.: Машиностроение, 1992. 464 с.

4. Волошенко В.В., Трубицин М.Н. Определение массовых геометрических и фрикционных характеристик роторных систем на выбеге в случае постоянства момента сопротивления вращению. VII Науково-технічна конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Наукова весна – 2016», Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДВНЗ НГУ, 2016. Т.5. С. 18-20.

5. Таган Е.Р., Трубицин М.Н. Движение ротора на выбеге в случае нулевого дискриминанта суммарного момента сопротивления вращению. VII Науково-технічна конференція студентів, аспірантів і молодих вчених «Наукова весна – 2016», Дніпропетровськ. Дніпропетровськ: ДВНЗ НГУ, 2016. Т.5. С. 8-9.

6. Таран И.А., Трубицин М.Н. Движение ротора на выбеге при специальном сочетании слагаемых суммарного момента сопротивления вращению. Техническая механика. 2016. №3. С. 120-132.

Ph.D., Associate Professor **Chovnyuk Yurii,**
Ph.D., Associate Professor **Priymachenko Aleksey,**
Associate Professor **Cherednichenko Petro,**
Senior Lecturer **Shudra Nataliia,**
Kyiv National University of Construction and Architecture

ANALYTICAL SUBSTANTIATION OF DETERMINATION OF INTEGRAL CHARACTERISTICS OF ROTOR SYSTEMS OF URBAN CRANES.

The work is devoted to the actual problem of analytical substantiation of determination of integral characteristics of rotor systems of city-building cranes, knowledge of which is necessary for carrying out further balancing of their rotors on coasting (or in the process of start-up). It allows to refuse the use of contact vibration sensors and other special equipment for monitoring the balancing process. Besides, there is a possibility to optimize the driving torque (during start-up) and braking torque during coasting of the rotor system. The purpose of the work is to develop an algorithm for determining the integral characteristics of the rotor system at start-up/run-out at a special ratio of moment coefficients - components of the total moment of resistance to rotation. Approaches and models of mathematical physics and classical calculus of variations are used. The results obtained in the paper will be useful for clarification and improvement of engineering methods of calculation of rotor systems of construction/urban cranes operating in transient modes (start-up, coasting, reversing, etc.), both at the stages of their design and in the modes of real operation.

Key words: analytical approach; justification; integral motion characteristics; rotor systems; urban construction cranes; start-up; coasting; optimization; kinematic and force parameters.

REFERENCES

1. Den-Hartoh Dzh.P. Mekhanycheskye kolebanyia. – M.: HYFML, 1960. 580 s. {in Russian}.

2. Holdyn A.S. Vybratsyy rotornыkh mashyn. – M.: Mashynostroenye, 2000. 344 s. {in Russian}.

3. Levyt M.E. Spravochnyk po balansyrovke. – M.: Mashynostroenye, 1992. 464 s. {in Russian}.

4. Voloshenko V.V., Trubytsyn M.N. Opredelenye massovыkh heometrycheskykh y fryktsyonnыkh kharakterystyk rotornыkh system na vыbehe v sluchae postoianstva momenta soprotyvlenyia vrashchenyiu. VII Naukovo-tekhnichna konferentsiia studentiv, aspirantiv i molodykh vchenykh «Naukova vesna – 2016», Dnipropetrovsk. Dnipropetrovsk: DVNZ NHU, 2016. T.5. S.18-20. {in Russian}.

5. Tahan E.R., Trubytsyn M.N. Dvyzhenye rotora na vыbehe v sluchae nulevoho dyskrymynanta summarnoho momenta soprotyvlenyia vrashchenyiu. VII Naukovo-tekhnichna konferentsiia studentiv, aspirantiv i molodykh vchenykh «Naukova vesna – 2016», Dnipropetrovsk. Dnipropetrovsk: DVNZ NHU, 2016. T.5. S. 8-9. {in Russian}.

6. Taran Y.A., Trubytsyn M.N. Dvyzhenye rotora na vыbehe pry spetsyalnom sochetanyy slahaemыkh summarnoho momenta soprotyvlenyia vrashchenyiu. Tekhnycheskaia mekhanyka. 2016. №3. S. 120-132. {in Russian}.