DOI: 10.32347/2076-815x.2023.84.153-160
УДК 528.4
Кінь Д.О.,
kin.do@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-0185-2534,
Київський національний університет будівництва та архітектури

ДОСЛІДЖЕННЯ РЕАЛІЗАЦІЇ ЧИСЕЛЬНИХ СТРОГИХ МАТЕМАТИЧНИХ МЕТОДІВ ІЗ ЗАДАННЯМ ПАРАМЕТРА КІЛЬКОСТІ ЧЛЕНІВ У РЯДУ ТЕЙЛОРА

Запропоновано математичну модель, яка дозволяє реалізувати функцію перетворення геодезичних координат у прямокутні плоскі проекції Гаусса-Крюгера у програмному середовищі на основі задання параметра кількості членів ряду Тейлора, регулюючи точність перетворення координат, а також їх розмірність. Метою цього дослідження є реалізація математичної моделі чисельного наближеного комп'ютерного методу перетворення геодезичних координат у плоскі прямокутні проекції Гаусса-Крюгера. Результати цього дослідження будуть також використанні під час створення функцій перетворення координат з прямокутних плоских проекції Гаусса-Крюгера у геодезичні та із однієї 6-градусної зони проекції Гаусса-Крюгера в іншу., враховуючи параметр кількості членів у ряду Тейлора.

Ключові слова: референц-еліпсоїд; геодезичні методи; строгі комп'ютерні методи; картометрія; ГІС, ряд Тейлора, математична модель.

Постановка проблеми. Одним із головних розділів картографії є застосування геодезичних і картометричних методів, які визначають умови всіх вимірювань на різноманітних картографічних матеріалах: картах, топографічних планах, профілях, ортофотопланах, космічних знімках тощо [1].

Можна зазначити про три етапи розвитку картометричних методів [2; 3]:

– аналогові картометричні методи;

– стандартні методи інструментальних геоінформаційних систем (далі – ГІС), які не є строгими, а наближеними, оскільки в обчисленні використовуються обмежена кількість членів в ряді Тейлора;

– строгі комп'ютерні методи, що дозволяють визначати кількісні характеристики об'єктів з високою точністю з практично нескінченною сумою членів у ряді Тейлора.

Для роботи з геопросторовими об'єктами у геоінформаційних системах доцільно використовувати референц-еліпсоїд [4-12]. Розрахунок картометричних характеристик і виконання геоінформаційного моделювання та аналізу має здійснюватися з урахуванням впливу кривизни Землі [4].

Це забезпечить перехід до строгих комп’ютерних методів, що дозволяють визначати кількісні характеристики з надвисокою точністю.

Насправді, вплив кривизни Землі наявний у всій продукції топографічної зйомки і не залежить від її масштабу. Побудова моделі земної поверхні та її відображення має здійснюватися на референц-еліпсоїді. У такому разі слід використовувати строгі аналітичні геодезичні методи в геоінформаційному середовищі.

Сьогодні обробка геодезичних вимірювань виконується в сучасних програмних засобах із застосуванням комп’ютерної обчислювальної техніки. Вирішення систем рівнянь з трьома і більше невідомими, розкладення функцій в ряд Тейлора практично без обмежень кількості членів, обчислення інтегралу функції та інші операції математичного аналізу, що застосовуються в сучасній геодезії та геоінформатиці, виконуються досить швидко.

На прикладі задачі з перетворення геодезичних координат у прямокутні плоскі розглянуто, яким чином можна максимально наблизитись до аналітичного виконання цього перетворення.

Аналіз досліджень та публікацій по темі дослідження. У роботі [5] було досліджено математичні моделі перетворення координат для проекції Меркатора. Однією із загальних особливостей досліджених математичних моделей перетворень є обмеження кількості членів ряду Тейлора, що неможливо було виконати без використання комп’ютерних та геоінформаційних технологій.

У роботах [13-18] було досліджено математичні моделі перетворення геодезичних координат у прямокутні плоскі та навпаки, також перетворення із однієї зони проекції Гаусса-Крюгера в іншу.

Метою роботи є реалізація математичної моделі чисельного наближеного комп’ютерного методу перетворення геодезичних координат у плоскі прямокутні проекції Гаусса-Крюгера.

Виклад основного змісту дослідження. Для отримання будь-якого конформного зображення еліпсоїда на поверхні застосовано формули (1) – (3):

$$x + iy = C(q + il)\,, \tag{1}$$

$$x = Cq;\, y = C\left(L - L_0\right), \tag{2}$$

$$x + iy = Ce^{-\alpha[q - i(\pi - l)]} = Ce^{-\alpha q}(-\cos\alpha(L - L_0) + i\sin(L - L_0))\,, \tag{3}$$

де $q = \ln\sqrt{(\frac{1+\sin B}{1-\sin B})(\frac{1-e\sin B}{1+e\sin B})^e}$, e – перший ексцентриситет еліпсоїда.

Якщо α=1, l – мала величина, застосовуючи формулу ряду Тейлора (4), отримаємо рівняння деякої рівнокутної проекції, що відображає поверхню еліпсоїда зонами невеликої ширини за довготою (5):

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4}$$

$$x + iy = f(q + il) = f(q) + \sum_{k=1}^{n} \frac{d^k f(q)}{k!dq^k}(il)^k \;, \tag{5}$$

де $i = \sqrt{-1}\;; i^n = (\sqrt{-1})^n$.

Розділяючи хибні (мнимі) та істинні частини рівняння, отримаємо формулу (6) та (7) для абсциси і ординати:

$$x = f(q) - \frac{d^2 f(q)}{2!dq^2} l^2 + \frac{d^4 f(q)}{24!dq^4} l^4 - \frac{d^6 f(q)}{720!dq^6} l^6 + ..., \tag{6}$$

$$y = \frac{df(q)}{dq} l + \frac{d^3 f(q)}{6!dq^3} l^3 - \frac{d^5 f(q)}{120!dq^5} l^5 + ... \tag{7}$$

де $f(q)$ – довжина дуги осьового меридіана від екватора до паралелі з широтою даної точки, яка визначається за формулами (8) і (9):

$$f(q) = d_1 B^{(рад)} - d_2 \sin 2B + d_3 \sin 4B - d_4 \sin 6B + ..., \tag{8}$$

$$d = a(1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 - ...)\,, \tag{9}$$

е – перший ексцентриситет еліпсоїда, *а* – велика піввісь еліпсоїда, *l* – різниця довгот у радіанах.

За Закатовим [15] формули (6) і (7) мають такий вигляд (10) і (11):

$$x = X - \frac{d^2 x}{2!dq^2} l^2 + \frac{d^4 x}{24!dq^4} l^4 - \frac{d^6 x}{720!dq^6} l^6 + ..., \tag{10}$$

$$y = \frac{dx}{dq} l + \frac{d^3 x}{6!dq^3} l^3 - \frac{d^5 x}{120!dq^5} l^5 + ...\,, \tag{11}$$

де $X = f(q)$.

Визначено два випадки: масштабний коефіцієнт $m_0 = 1$ *або* $m_0 \neq 1$. Для проекції Гаусса-Крюгера $m_0 = 1$, тому:

$$\frac{dx}{dq} = m_0 r = N\cos B \quad , \tag{12}$$

$$\frac{d^2x}{dq^2} = -m_0 r\sin B = -N\cos B\sin B \quad , \tag{13}$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{14}$$

$$r = N\cos B = \frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}} \tag{15}$$

Закатов П.С. і Морозов В.П використовують математичні моделі перетворення координат з геодезичних у прямокутні плоскі із застосуванням тригонометричних функцій та правил спрощень, що не дозволяє задавати кількість членів ряду Тейлора параметром.

Для цієї задачі автором статті було запропоновано адаптацію визначення абсцис і ординат за формулами (16) і (17), на основі математичних моделей у роботах[15; 16]:

$$x = X - \frac{l^2}{2!}\left(\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)'' + \frac{l^4}{4!}\left(\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)^{(4)} + \ldots + r^{(2n)}\frac{l^{2n}}{(2n)!}, \tag{16}$$

$$y = r\cdot l - \frac{l^3}{3!}\left(\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)''' + \frac{l^5}{5!}\left(\frac{a\cos B}{\sqrt{1-e^2\sin^2 B}}\right)^{(5)} + \ldots + r^{(2n+1)}\frac{l^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{17}$$

Закатов П.С. [15] встановив, що без застосування 2-ого і більше порядків ряду Тейлора для точних розрахунків формули (16) і (17) використовувати не слід. Тільки із використанням 6-ого та вище порядку ряду.

Морозов В.П. [16] зазначає, що коефіцієнти в цих формулах є функціями тільки для широти *B*. Характерною ознакою рівнянь симетричних проекцій є те, що рівняння абсцис складається тільки з парної степені різниць довгот, а рівняння ординат – з непарної.

Ці математичні моделі (16) і (17) рекомендовано реалізовувати у програмних середовищах MATLAB або PhyCharm з використанням необхідних бібліотек.

Висновки. 1. Запропонована математична модель дозволяє реалізувати функцію перетворення геодезичних координат у прямокутні плоскі проекції Гаусса-Крюгера у програмному середовищі на основі задання параметра кількості членів ряду Тейлора, регулюючи точність перетворення координат, а також їх розмірність.

2. У перспективі будуть проведені наукові дослідження з розроблення нових методик для картометричних операцій [19; 20], які би практично не мали обмежень для досягнення необхідної точності, в тому числі і для надвеликих відстаней. Ці пропозиції будуть обґрунтуванням для внесення змін у нормативно-правові документи, що регулюють створення та оновлення геопросторових даних і виконання геодезичних, картометричних та морфометричних методів у геоінформаційному середовищі.

Список джерел

1. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2021). Ontology of geodetic, cartometric and morphometric methods in the geoinformation environment. In *Geoinformatics* (Vol. 2021, No. 1, pp. 1-6). European Association of Geoscientists & Engineers.
2. Karpinskyi Yu., & Kin D. (2020). Research of the transition from cartometric to analytical operations. *XXV Jubilee International Scientific and Technical Conference «Geoforum – 2020»*, Lviv, Ukraine. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34353.40806.
3. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2020). Peculiarities of the method of calculation feature's geodetic area on the reference ellipsoid in GIS. *International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020»* (Vol. 2020, No. 1, pp. 1-5). European Association of Geoscientists & Engineers. 10.3997/2214-4609.20205757.
4. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2022). The phenomenon of topological inconsistencies of frames of map sheets during the creation of the Main state topographic map. ISTCGCAP, 95, 103-112. http://dx.doi.org/10.23939/istcgcap2022.95.103.
5. Karney, C.F. (2011).Transverse Mercator with an accuracy of a few nanometers. Journal of Geodesy, 85(8), 475-485. doi:10.1007/s00190-011-0445-3.
6. Baselga, S., & Olsen, M. J. (2021). Approximations, Errors, and Misconceptions in the Use of Map Projections. Mathematical Problems in Engineering, 2021.
7. Berk, S. and Ferlan, M. (2018). Accurate area determination in the cadaster: Case study of Slovenia. cartography and geographic information science, 45(1), 1-17., https://doi.org/10.1080/15230406.2016.1217789.
8. Dong, J., Ji, H., Tang, L., Peng, R., & Zhang, Z. (2021). Accuracy analysis and verification of the method for calculation of geodetic problem on earth ellipsoid surface. In E3S Web of Conferences (Vol. 245, p. 02033). EDP Sciences.
9. Kuźma M., Pędzich Paweł: Application of methods for area calculation of geodesic polygons on Polish administrative units, w: Geodesy and Cartography, vol. 61, nr 2, 2012, ss. 105 – 115.
10. Morgaś, W., & Kopacz, Z. (2016). Analytical dependence relations of converting geodetic coordinates into UTM coordinates recommended in hydrographic work. Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej, 57(2 (205)), 61-73.
11. Panou, G., & Korakitis, R. (2021). Analytical and numerical methods of converting

Cartesian to ellipsoidal coordinates. Journal of Geodetic Science, 11(1), 111-121.

12. Pędzich, P., Balcerzak, J., & Panasiuk, J. (2009). New approach to the Gauss-Kruger projection of an ellipsoid onta a sphere (No. R3/RS). Department of Cartography, p. 11.

13. Барановський В.Д., Карпінський Ю.О., Лященко А.А. Топографо-геодезичне та картографічне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Визначення площ територій / За заг. Ред. Ю.О. Карпінського. – К.: НДІГК. 2009. – 92 с. – (Сер. Геодезія, картографія, кадастр).

14. Барановський В.Д., Карпінський Ю.О., Кучер О.В., Лященко А.А. Топографо-геодезичне та картографічне забезпечення ведення державного земельного кадастру. Системи координат і картографічні проекції. /За загальною редакцією Ю.О. Карпінського. К.: НДІГК, 2009. – 96 с.: іл.. – (Сер. "Геодезія, картографія, кадастр).

15. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. Изд. 4, перераб. и доп. М.: Недра, 1976. 511 с.

16. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. М., Недра, 1979, 296 с.

17. Рехтзамер Г.Р. Основы картографии (учебное пособие). Л., 1974. 217 с. (ЛГМИ).

18. Руководство по определению расчетных гидрологических характеристик. Л., Гидрометеоиздат, 1973. 112 с.

19. OpenGIS Implementation Specification: Coordinate Transformation Services Revision 1.00. OpenGIS Project Document 01-009. – Open GIS Consortium. – January 12, 2001.

20. ДСТУ ISO/TS 19127:2017 (ISO/TS 19127:2005, IDT) «Географічна інформація. Геодезичні коди і параметри».

Assistant **Kin Danylo**,
Kyiv National University of Construction and Architecture

THE RESEARCH OF IMPLEMENTATION OF NUMERICAL RIGOROUS MATHEMATICAL METHODS WITH THE PARAMETER OF THE MEMBERS NUMBER IN THE TAYLOR SERIES

The current level of development of geoinformation technologies makes it possible to determine the cartometric properties of terrain objects with a user-defined accuracy. The author of this paper proposes a mathematical model that allows to implement the function of converting geodetic coordinates into rectangular flat Gauss-Kruger projections in a software environment based on the setting of the parameter of the number of members in the Taylor series, adjusting the accuracy of the coordinate transformation and their dimension. The purpose of this work is to implement a mathematical model of a numerical approximate computer method of converting geodetic coordinates into flat rectangular Gauss-Kruger projections. The results of this study will also be used to create functions for converting coordinates

from rectangular flat Gauss-Kruger projections to geodetic coordinates and from one 6-degree zone of the Gauss-Kruger projection to another, taking into account the parameter of the number of members in the Taylor series. The proposed mathematical models are recommended to be implemented in the MATLAB or PhyCharm using the necessary libraries. The following studies will focus on determining the areas and lengths of objects located in two or more 6-degree zones of the Gauss-Kruger projection.

Key words: reference ellipsoid; geodetic methods; rigorous computer methods; cartometry; GIS, Taylor series, mathematical model.

REFERENCES

1. Baranovskyi V.D., Karpinskyi Y.O., Lyashchenko A.A. Topographic, geodetic and cartographic support of the state land cadastre. Determination of the areas of territories / Under the general editorship of Y.O. Karpinsky - Kyiv: NIIGK. 2009. - 92 p. - (Ser. Geodesy, cartography, cadastre). {in Ukrainian}

2. Baranovskyi V.D., Karpinskyi Y.O., Kucher O.V., Lyashchenko A.A. Topographic, geodetic and cartographic support of the state land cadastre. Coordinate systems and cartographic projections. K.: NDIGK, 2009. 96 p.: ill. - (Series "Geodesy, Cartography, Cadastre). {in Ukrainian}

3. Karney, C.F. (2011).Transverse Mercator with an accuracy of a few nanometers. Journal of Geodesy, 85(8), 475-485. doi:10.1007/s00190-011-0445-3. {in English}

4. Baselga, S., & Olsen, M. J. (2021). Approximations, Errors, and Misconceptions in the Use of Map Projections. Mathematical Problems in Engineering, 2021. {in English}

5. Berk, S. and Ferlan, M. (2018). Accurate area determination in the cadaster: Case study of Slovenia. cartography and geographic information science, 45(1), 1-17., https://doi.org/10.1080/15230406.2016.1217789. {in English}

6. Dong, J., Ji, H., Tang, L., Peng, R., & Zhang, Z. (2021). Accuracy analysis and verification of the method for calculation of geodetic problem on earth ellipsoid surface. In E3S Web of Conferences (Vol. 245, p. 02033). EDP Sciences. {in English}

7. Kuźma M., Pędzich Paweł: Application of methods for area calculation of geodesic polygons on Polish administrative units, w: Geodesy and Cartography, vol. 61, nr 2, 2012, ss. 105 – 115. {in English}

8. Morgaś, W., & Kopacz, Z. (2016). Analytical dependence relations of converting geodetic coordinates into UTM coordinates recommended in hydrographic work. Zeszyty Naukowe Akademii Marynarki Wojennej, 57(2 (205)), 61-73. {in English}

9. Panou, G., & Korakitis, R. (2021). Analytical and numerical methods of converting Cartesian to ellipsoidal coordinates. Journal of Geodetic Science, 11(1), 111-121. {in English}

10. Pędzich, P., Balcerzak, J., & Panasiuk, J. (2009). New approach to the Gauss-Kruger projection of an ellipsoid onta a sphere (No. R3/RS). Department of Cartography, p. 11. {in English}

11. OpenGIS Implementation Specification: Coordinate Transformation Services Revision 1.00. OpenGIS Project Document 01-009. – Open GIS Consortium. – January 12, 2001. {in English}

12. DSTU ISO/TS 19127:2017 (ISO/TS 19127:2005, IDT) «Geographic information. Geodetic codes and parameters». {in English}

13. Karpinskyi Yu., & Kin D. (2020). Research of the transition from cartometric to analytical operations. *XXV Jubilee International Scientific and Technical Conference «Geoforum – 2020»*, Lviv, Ukraine. https://doi.org/10.13140/RG.2.2.34353.40806. {in Ukrainian}

14. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2020). Peculiarities of the method of calculation feature's geodetic area on the reference ellipsoid in GIS. *International Conference of Young Professionals «GeoTerrace-2020»* (Vol. 2020, No. 1, pp. 1-5). European Association of Geoscientists & Engineers. 10.3997/2214-4609.20205757 {in English}

15. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2021). Ontology of geodetic, cartometric and morphometric methods in the geoinformation environment. In *Geoinformatics* (Vol. 2021, No. 1, pp. 1-6). European Association of Geoscientists & Engineers. {in English}

16. Kin, D., & Karpinskyi, Y. (2022). The phenomenon of topological inconsistencies of frames of map sheets during the creation of the Main state topographic map. ISTCGCAP, 95, 103-112. http://dx.doi.org/10.23939/istcgcap2022.95.103 {in English}

17. Zakatov P. S. Course of higher geodesy. Izd. 4, revision and supplement. m., "Nedra", 1976, 511 p. {in Russian}

18. Morozov V.P. Course of spheroidal geodesy. Izd. 2, revision and supplement. M., Nedra, 1979, 296 p. {in Russian}

19. Rekhtzamer, G. (1974). Fundamentals of cartography (textbook). Gidrometeoizdat. 217. {in Russian}

20. Guidelines for Determining Calculated Hydrological Characteristics (1973). Gidrometeoizdat. 112. {in Russian}