

DOI: 10.32347/2076-815X.2023.83.366-373

УДК 534, 517.928

к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,
к.т.н., доцент **Кравчук В.Т.**,
vtk1@ukr.net, ORCID: 000-0002-5213-3644,
доцент **Чередніченко П.П.**,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661X,
к.т.н., доцент **Остапущенко О.П.**,
olga_ost_17@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8114-349X,
Кравченко І.М.,
kim-ua@i.ua, ORCID: 0000-0001-7077-1546,
Київський національний університет будівництва і архітектури

АНАЛІЗ КОЛИВАНЬ, ВИНИКАЮЧИХ У МОСТОВОМУ КРАНІ ПРИ ЙОГО НАЇЗДІ НА КІНЦЕВІ УПОРИ

Розглянута система “вантажний візок – канат – вантаж”, яка моделює рух кранової системи мостового типу, при наїзді на кінцеві упори. Фактично, вантаж, закріплений на канаті, виконує роль маятникового гасника коливань кранової системи. Вивчені можливі нормальні форми коливань у такій системі. У системі можна виділити пов’язану (нелокальну) та локалізовану форми коливань. У другому випадку більша частина енергії коливань зосереджена саме у “маятниковому гаснику” – вантажі на канаті (вважається, що мостовий кран функціонує у робочому режимі, і розвантаження відсутнє). По суті, локалізована форма коливань може бути сприятлива для гасіння коливань пружної підсистеми. Проведена побудова нормальних форм коливань й досліджена їх стійкість.

Ключові слова: аналіз; коливання; нормальні форми; мостовий кран; маятниковий гасник; вантаж; канат; наїзд; кінцеві упори.

Постановка проблеми. У процесі функціонування мостових кранів, які розглядаються у межах моделі “візок – канат – вантаж”, при відсутності їх розвантаження часто трапляються наїзди візка на кінцеві упори. При цьому у пружній підсистемі (упорах) можуть виникати небажані коливання, котрі здатні згасити канат із закріпленням на ньому вантажем, якщо останні виступають у якості маятникового гасника коливань, оскільки маятникові коливання вантажу неминуче виникають внаслідок розгойдування канату з вантажем при їх взаємодії з кінцевими упорами опосередковано через вантажний візок крану, до

якого вони прикріплені. У даній роботі розглянута система з маятниковим гасником коливань й досліджені нормальні форми коливань у двох підсистемах: а) у пружній (упори); б) локалізованій (вантаж на канаті, прикріплений до візка).

Аналіз публікацій по темі дослідження. Маятникові системи, вивчення котрих продовжується й сьогодні, представляють чималий інтерес як для нелінійної динаміки [1-3], так й для різноманітних технічних застосувань, зокрема, вони використовуються у задачах вібраційного гасіння коливань [4-6], а також при описуванні фізичних процесів [7-8]. Не дивлячись на те, що рух маятникових систем детально вивчався як у минулому [9], так і у останні часи [10,11], аналітичні результати отримані тільки лише для коливань з відносно невеликими амплітудами. Сучасні методи теорії збурень у сполученні з обчислювальними процедурами часто використовуються для побудови і аналізу стійкості нелінійних нормальних форм коливань [12-15] як для малих, так і для великих амплітуд коливань. У даній роботі розглянута динаміка системи з маятниковим гасником коливань, яка моделює роботу навантаженого мостового крану при наїзді його візка на кінцеві упори.

Мета роботи полягає в обґрунтуванні фізико-механічної моделі мостового крану при взаємодії його вантажного візка з кінцевими упорами, на які він наїжджає, а підвішений до візка на канаті вантаж слугує при цьому маятниковим гасником коливань у пружній підсистемі (кінцевих упорах). Вказана модель використана для аналізу нормальних форм коливань, виникаючих у крановій системі, зокрема, у її пружній підсистемі (кінцевих упорах).

Виклад основного змісту дослідження.

1. Побудова лінійних нормальних форм коливань.

Розглянемо вільні коливання системи з двома степенями вільності руху, модель котрої подана на рис.1.

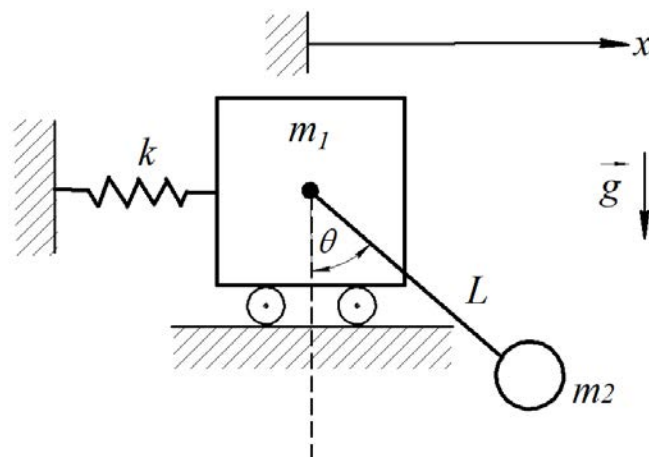


Рис.1. Модель кранової системи мостового типу при наїзді на кінцеві упори

На рис.1 введені наступні позначення: m_1 – маса кранового візка, m_2 – маса вантажу на канаті; l – довжина канату; θ – кут відхилення канату з вантажем від вертикалі; k – жорсткість пружин кінцевих упорів (сумарна); $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ – прискорення вільного падіння.

У цій моделі системи “візок – канат – вантаж” мостового крану необхідно погасити коливання пружини жорсткістю k (кінцеві упори). Візок представляє собою точкову масу m_1 . До лінійного осцилятора приєднаний “маятниковий гасник” (канат з вантажем), який має масу m_2 і довжину l . Коливання системи описуються двома узагальненими координатами x (переміщення маси m_1), та θ (кут відхилення маятника з масою m_2). Точні рівняння руху системи мають наступний вид [15]:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} \cos \theta - m_2 l \dot{\theta}^2 \sin \theta + kx = 0; \\ \ddot{x} \cos \theta + l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0. \end{cases} \quad (1)$$

У подальшому розглядаємо малі кути відхилення θ , тобто $0 < \theta \ll 1$ (тобто кути, менші 0,1 рад). В цьому випадку $\sin \theta \approx \theta$, $\cos \theta \approx 1$, а система (1) набуває вигляду:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} - m_2 l \dot{\theta}^2 \cdot \theta + kx = 0; \\ \ddot{x} + l \ddot{\theta} + g \theta = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Для лінійного наближення задачі третім членом у першому рівнянні системи (2) можна знехтувати, тоді замість (2) маємо:

$$\begin{cases} (m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 l \ddot{\theta} + kx = 0; \\ \ddot{x} + l \ddot{\theta} + g \theta = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Шляхом подвійного диференціювання по t першого та другого рівнянь системи (3) й нескладних перетворень можна вказану систему звести до одного диференціального рівняння для θ :

$$\theta^{(IV)} \cdot (m_1 l) + \ddot{\theta} \cdot [(m_1 + m_2)g + kl] + kg \theta = 0. \quad (4)$$

Детальний аналіз рівняння (4) показує, що у розглядуваній системі за період контакту ($t \in [0, \tau_k]$) між вантажним візком мостового крану й кінцевими упорами виникають вільні (незатухаючі) коливання вантажу на канаті на двох частотах: $\Omega_1^{(+)}$, $\Omega_2^{(-)}$. Причому $\Omega_1^{(+)} > \Omega_2^{(-)}$. Вирази для вказаних частот мають вид:

$$\Omega_1^{(+)} = \left\{ \frac{[(m_1 + m_2)g + kl] + \left\{ [(m_1 + m_2)g + kl]^2 - 4m_1 \cdot l \cdot g \cdot k \right\}^{1/2}}{2(m_1 l)} \right\}^{1/2}, \quad (5)$$

$$\Omega_2^{(-)} = \left\{ \frac{[(m_1 + m_2)g + kl] - \left\{ [(m_1 + m_2)g + kl]^2 - 4m_1 \cdot l \cdot g \cdot k \right\}^{1/2}}{2(m_1 l)} \right\}^{1/2}. \quad (6)$$

Отже, у результаті такої взаємодії між вантажним візком мостового крану та його кінцевими упорами існують коливання вантажу на канаті (кран не розвантажений), які можна описати для $\theta(t)$ наступним чином:

$$\theta(t) = \bar{C}_1 \sin(\Omega_1^{(+)}t) + \bar{C}_2 \cos(\Omega_1^{(+)}t) + \bar{C}_3 \sin(\Omega_2^{(-)}t) + \bar{C}_4 \cos(\Omega_2^{(-)}t), \quad (7)$$

де: $\bar{C}_i, (i = \overline{1,4})$ – невизначені константи. Їх можна визначити, виходячи з початкових/кінцевих (термінальних) умов руху системи. Подібні процеси небажані для кранів мостового типу, оскільки можуть призводити до значних (незатухаючих) розгойдувань вантажу на канаті, що, у свою чергу, перевантажує канат крану, а може призвести й до аварій (зокрема, розриву канату) з тяжкими наслідками.

Визначимо закон руху $\theta(t)$, за якого виконується наступний критерій якості руху системи:

$$\left\{ \frac{1}{\tau_{\text{конт.}}} \cdot \int_0^{\tau_{\text{конт.}}} [\theta^2] dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min, \tau_{\text{конт.}} \equiv \tau_{\kappa}. \quad (8)$$

Фізичний зміст критерію якості руху системи (8) полягає у тому, що за термін (у часі) контакту (τ_{κ}) вантажного візка з кінцевими упорами кут відхилення від вертикалі (його середньоквадратичне значення) набуває мінімальної величини.

Використовуючи рівняння (4), можна (8) звести до наступного виду:

$$\left\{ \frac{1}{\tau_{\text{конт.}}} \cdot \frac{1}{(gk)^2} \cdot \int_0^{\tau_{\text{конт.}}} \left\{ \theta^{(IV)}(m_1l) + \ddot{\theta}[(m_1 + m_2)g + kl] \right\}^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min. \quad (9)$$

Необхідною умовою реалізації/виконання критерію у формі (9) є диференціальне рівняння Ейлера-Пуассона для $\theta(t)$ наступного вигляду:

$$\theta^{(VIII)} \cdot (m_1l)^2 + \theta^{(VI)} \cdot 2[(m_1 + m_2)g + kl](m_1l) + \theta^{(IV)} \cdot [(m_1 + m_2)g + kl]^2 = 0. \quad (10)$$

Детальний аналіз характеристичного рівняння для (10) показує, що розв'язок останнього можна подати наступним чином:

$$\theta(t) = C_1 + C_2t + C_3t^2 + C_4t^3 + (C_5 + C_6t)\sin\Omega t + (C_7 + C_8t)\cos\Omega t, \quad (11)$$

де: $C_i, (i = \overline{1,8})$, – константи, котрі визначаються з наступних термінальних умов:

$$\begin{cases} \theta|_{t=0} = \theta_0; \dot{\theta}|_{t=0} = \dot{\theta}_0; \ddot{\theta}|_{t=0} = \ddot{\theta}_0; \ddot{\theta}|_{t=0} = \ddot{\theta}_0; \\ \theta|_{t=\tau_{\kappa}} = 0; \dot{\theta}|_{t=\tau_{\kappa}} = 0; \ddot{\theta}|_{t=\tau_{\kappa}} = 0; \ddot{\theta}|_{t=\tau_{\kappa}} = 0, \end{cases} \quad (12)$$

а частота Ω визначається зі співвідношення:

$$\Omega = \left\{ \frac{[(m_1 + m_2)g + kl]}{m_1l} \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

При чисельному розв'язанні даної задачі величини $\theta_0, \dot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0, \ddot{\theta}_0$ задаються, тому у цілому визначення констант $C_i, i = \overline{(1,8)}$, зводиться до розв'язку системи неоднорідних лінійних рівнянь відносно вказаних констант за правилом Крамера.

Слід зазначити, що аналогічним способом, перетворюючи рівняння системи (3), можна прийти до рівняння типу (4), але для $x(t)$:

$$x^{(IV)} \cdot (m_1 l) + \ddot{x} \{ (m_1 + m_2) g + kl \} + gk \cdot x = 0, \quad (14)$$

яке свідчить про існування у пружних упорах крану точно таких по формі й частотам коливань, як і у системі “канат – вантаж” (7). Тому, дбаючи про зменшення амплітуди коливань (при розгойдуванні) вантажу на канаті (критерії (8), (9)) автоматично будемо гасити й коливання пружин кінцевих упорів (описуються законом $x(t)$).

ВИСНОВКИ

1. У роботі проведено аналітичне дослідження нормальних форм коливань системи “візок – канат – вантаж” крану мостового типу при наїзді візка на кінцеві упори. По суті, вантаж на канаті виступає тут у ролі маятникового вібраційного гасника коливань.

2. Встановлені умови і закони руху пружин кінцевих упорів ($x(t)$) та коливань канату з вантажем (характеризуються кутом відхилення канату від вертикалі $\theta(t)$), за яких вказані відхилення ($x(t)$ від початкового положення) та $\theta(t)$ мінімізуються.

3. У подальшому дослідження подібних систем буде проведено у нелінійній постановці, коли закон деформування пружин кінцевих упорів відповідає залежностям, характерним для кусково-лінійних (суттєво-нелінійних) систем.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Малкин И.Г. Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. – М.: Гостехтеориздат, 1956. 492 с. (рос.)
2. Блэкьер О. Анализ нелинейных систем. – М.: Мир, 1969. 400 с. (рос.)
3. Nayfeh A.H., Mook D.T. Nonlinear oscillations. – New York: Wiley, 1979. 704 p. (англ.)
4. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах/ Под ред. К.В.Фролова. – М.: Машиностроение, 1995. Т.6. 456 с. (рос.)
5. Civalci O., Ertas A. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory. Vibrations and Acoustics. 1996. Vol.118. P. 558-566. (англ.)
6. Lee C.T., Shaw S.W. Nonlinear dynamic response of paired centrifugal pendulum vibration absorbers. Journal of Sound and Vibration. 1997. Vol.203. P. 731-743. (англ.)
7. Витт А.А., Горелик Г.С. Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем. Журнал технической физики. 1933. Т.3. С. 294-307. (рос.)
8. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах. – М.: Советское радио, 1977.

368 с. (рос.)

9. Старжинский В.М. Прикладные методы нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1977. 255 с. (рос.)

10. Wang F., Bajaj A., Kamiya K. Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system. *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol.42 (3). P. 233-265. (англ.)

11. Warminski J., Kecik K., Awrejcewicz J. Regular and chaotic motions of an autoparametric real pendulum system with the use of MR damper. *Modeling Simulation and Control Nonlinear Eng. Dynamical Systems*. 2009. P. 267-276. (англ.)

12. Маневич Л.И., Михлин Ю.В., Пилипчук В.Н. Метод нормальных колебаний для существенно нелинейных систем. – М.: Наука, 1989. 216 с. (рос.)

13. Mikhlin Yu.V. Normal vibrations of a general class of conservative oscillations. *Nonlinear dynamics*. 1996. Vol.II. P. 1-16. (англ.)

14. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A. Normal Modes and localization in Nonlinear Systems. – New-York: Willey, 1996. 552 p. (англ.)

15. Михлин Ю.В., Клименко А.А. Нормальные формы колебаний в нелинейной системе, содержащей маятниковый гаситель колебаний. *Проблемы машиностроения*. 2014. Е.17. №3. С. 38-44. (рос.)

16. Човнюк Ю.В., Сівак І.М., Кравчук В.Т. Дискретно-континуальне моделювання та динамічна оптимізація режимів роботи вантажопідійомних та транспортуючих машин. Монографія. – К.: ТОВ «ТРОПЕА», 2020. 180 с. (укр.)

17. Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Кадикало І.О. Оптимізація динамічних навантажень у пружних елементах вантажопідійомних кранів при різних способах підйому вантажу. Ч. III. Підйомно-транспортна техніка. – Одеса: 2020. №1. С. 87-97. (укр.)

18. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., Човнюк Ю.В., Кадикало І.О. Динаміка й оптимізація підйомно-транспортних машин. Монографія. – К.: ФОП Ямчинський О.В., 2019. 292 с. (укр.)

19. Човнюк Ю.В., Сівак І.М. Дискретно-континуальне моделювання та динамічна оптимізація вантажопідійомних механізмів і транспортуючих машин. – К.: НУБіПУ, 2019. 900 с. (укр.)

Ph.D., Professor **ISA Chovnyuk Yurii**,
Associate Professor **Cherednichenko Petro**,
Ph.D., Associate Professor **Kravchyuk Volodymyr**,
Ph.D., Associate Professor **Ostapushchenko Olga**, **Kravchenko Igor**,
Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine

ANALYSIS OF OSCILLATIONS OCCURRING IN BRIDGE-TYPE CRANE WHEN IT HITS THE END STOPS

The “cargo cart – rope – load” system considered, which simulates a bridge-type crane system movement when it hits the end stops. In fact, the load attached to the rope acts as a pendulum dampener of the crane system’s oscillations. Possible normal forms

of oscillations in such a system studied. In the system, it is possible to distinguish related (non-local) and localized oscillations forms. In the second case, most of the vibration energy is concentrated precisely in the “pendulum dampener” – in the load on the rope (it is considered, that bridge-type crane is functioning in the working mode and there is no unloading). In fact, the localized oscillations form can be favorable for the elastic subsystem’s oscillations damping. Construction of oscillations’ normal forms carried out and their stability investigated.

Key words: analysis; oscillations; normal forms; bridge-type crane; pendulum dampener; load; rope; hitting; end stops.

REFERENCES

1. Malkyn Y.H. *Nekotorye zadachy teoryy nelyneinykh kolebaniy*. – M.: Hostekhteorizdat, 1956. 492 s. {in Russian}
2. Blaker O. *Analyz nelyneinykh system*. – M.: Myr, 1969. 400 s. {in Russian}
3. Nayfeh A.H., Mook D.T. *Nonlinear oscillations*. – New York: Wiley, 1979. 704 p. {in English}
4. *Vybratsyy v tekhnike. Spravochnyk v 6 tomakh/ Pod red. K.V.Frolova*. – M.: Mashynostroeny, 1995. T.6. 456 s. {in Russian}
5. Cuvalci O., Ertas A. Pendulum as vibration absorber for flexible structures: experiments and theory. *Vibrations and Acoustics*. 1996. Vol.118. P. 558-566. {in English}
6. Lee C.T., Shaw S.W. Nonlinear dynamic response of paired centrifugal pendulum vibration absorbers. *Journal of Sound and Vibration*. 1997. Vol.203. P. 731-743. {in English}
7. Vyyt A.A., Horelyk H.S. Kolebaniya upruhoho maiatnyka kak prymer dvukh parametrychesky svyazannykh lyneinykh system. *Zhurnal tekhnicheskoi fizyky*. 1933. T.3. S. 294-307. {in Russian}
8. Skott Э. *Volny v aktyvnykh y nelyneinykh sredakh*. – M.: Sovetskoe radio, 1977. 368 s. {in Russian}
9. Starzhynskiy V.M. *Prykladnye metody nelyneinykh kolebaniy*. – M.: Nauka, 1977. 255 s. {in Russian}
10. Wang F., Bajaj A., Kamiya K. Nonlinear normal modes and their bifurcations for an inertially coupled nonlinear conservative system. *Nonlinear Dynamics*. 2005. Vol.42 (3). P. 233-265. {in English}
11. Warminski J., Kecik K., Awrejcewicz J. Regular and chaotic motions of an autoparametric real pendulum system with the use of MR damper. *Modeling Simulation and Control Nonlinear Eng. Dynamical Systems*. 2009. P. 267-276. {in English}

12. Manevych L.Y., Mykhlyn Yu.V., Pylypchuk V.N. Metod normalnykh kolebaniy dlia sushchestvenno nelyneinykh system. – M.: Nauka, 1989. 216 s. {in Russian}
13. Mikhlin Yu.V. Normal vibrations of a general class of conservative oscillations. Nonlinear dynamics. 1996. Vol.II. P. 1-16. {in English}
14. Vakakis A., Manevitch L., Mikhlin Yu., Pilipchuk V., Zevin A. Normal Modes and localization in Nonlinear Systems. – New-York: Willey, 1996. 552 p. {in English}
15. Mykhlyn Yu.V., Klymenko A.A. Normalnye formy kolebaniy v nelyneinoi systeme, coderzhashchei maiatnykovyі hasytel kolebaniy. Problemy mashynostroenyia. 2014. E.17. №3. S. 38-44. {in Russian}
16. Chovniuk Yu.V., Sivak I.M., Kravchuk V.T. Dyskretno-kontynualne modeliuvannia ta dynamichna optymizatsiia rezhymiv roboty vantazhopidiomnykh ta transportuiuchykh mashyn. Monohrafiia. – K.: TOV «TROPEA», 2020. 180 s. {in Ukrainian}
17. Loveikin V.S., Chovniuk Yu.V., Kadykalo I.O. Optymizatsiia dynamichnykh navantazhen u pruzhnykh elementakh vantazhopidiomnykh kraniv pry riznykh sposobakh pidomu vantazhu. Ch. III. Pidomno-transportna tekhnika. – Odesa: 2020. №1. S. 87-97. {in Ukrainian}
18. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O., Chovniuk Yu.V., Kadykalo I.O. Dynamika y optymizatsiia pidomno-transportnykh mashyn. Monohrafiia. – K.: FOP Yamchynskyi O.V., 2019. 292 s. {in Ukrainian}
19. Chovniuk Yu.V., Sivak I.M. Dyskretno-kontynualne modeliuvannia ta dynamichna optymizatsiia vantazhopidiomnykh mekhanizmiv i transportuiuchykh mashyn. – K.: NUBiPU, 2019. 900 s. {in Ukrainian}