

DOI: 10.32347/2076-815X.2023.83.304-313

УДК 624.04

д.т.н., професор Сур'янінов М.Г.,

sng@ogasa.org.ua, ORCID: 0000-0003-2592-5221,

д.т.н., професор Крутий Ю.С.,

yurii.krutii@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7105-3087,

Кіріченко Д.О., sunnyderypeople123@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8484-0925,

Клименко О.М., bolshajaakula@gmail.com, ORCID: 0000-0002-7445-6057,

Одеська державна академія будівництва та архітектури, м. Одеса

## ДО РОЗРАХУНКУ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИН НА ЗМІННІЙ ПРУЖНІЙ ОСНОВІ

*Досліджується вигин кільцевих пластин на змінній пружній основі. Використовується аналітичний метод прямого інтегрування та комп'ютерне моделювання у ПК ЛІРА-САПР з наступними розрахунками методом скінчених елементів. Розглянуто два приклади: сталева плита, яка жорстко защемлена за внутрішнім контуром, а її зовнішній контур спирається шарнірно, та бетонна плита, яка жорстко затиснена по зовнішньому контуру, а її внутрішній контур закріплений шарнірно. Результати чисельної реалізації показують, що значення прогинів при розрахунках авторським методом і методом скінчених елементів у ПК ЛІРА-САПР практично збігаються, а розбіжність значень згинальних моментів досягає 10 %. Причому, розбіжність у прогинах проявляється тільки в четвертому (а іноді й у п'ятому) знаку після коми. Відзначається, що метод прямого інтегрування продемонстрував дуже високу точність при розв'язку численних тестових завдань, що мають точний розв'язок. Отриману тут розбіжність у значеннях згинальних моментів автори пояснюють напівавтоматичною розбивкою скінчено-елементної сітки в ПК ЛІРА-САПР. Таке твердження ґрунтується на тому, що при згущенні сітки в окружному напрямку відбувається істотне зближення результатів, отриманих двома методами при визначенні радіальних і окружних згинальних моментів.*

*Ключові слова: метод прямого інтегрування; кільцева плита; пружна основа; модель Вінклера; змінний коефіцієнт постелі; метод скінчених елементів; ПК ЛІРА-САПР.*

**Вступ.** Кільцева плита або пластина на пружній основі є математичною моделлю багатьох конструкцій, що застосовуються в різних галузях промисловості. В першу чергу це відноситься до будівельних об'єктів, і,

зокрема, до фундаментних плит. Існують різні моделі пружної основи. Найпростішою є модель Вінклера, або пружинна модель. Для балок на постійній пружній основі ця модель дозволяє отримати точне рішення, а для плит — ні. Ще складніше йде справа, коли пружна основа є змінною. Не існує єдиного підходу для побудови універсального аналітичного рішення. Тому в інженерній практиці застосовуються чисельні методи розрахунку. З цієї проблематики існує чимало публікацій, що висвітлюють різні напрямки досліджень. Проте інформації про згин пластин постійної або змінної товщини на змінній пружній основі в літературі вкрай мало.

Застосування аналітичних методів до подібних задач у літературі відсутнє. У цьому зв'язку немає можливості оцінювати ефективність і точність результатів, отриманих за допомогою скінчено-елементного аналізу.

**Аналіз попередніх досліджень.** Основний розвиток наука про розрахунок пластин отримала в першій половині ХХ століття. Теорія розрахунку круглих і кільцевих пластин докладно розглядається в фундаментальних працях І.Г. Бубнова [1], Б.Г. Гальборкіна [2], С.П. Тимошенка і С.П. Войновського-Кригера [3], А.Л. Гольденвейзера [4]. Слід також відзначити великий вклад таких іноземних вчених як Ф. Дішінгер, В. Флюгге, Л. Доннелл, А.Е. Грін і В. Церн, В.Т. Койтер, П.М. Нагді [5 - 9]. Багато досліджень проводилося з теорії та розрахунку круглих і кільцевих пластин на різних моделях пружної основи, але переважно із застосуванням наближених методів.

З пізніших досліджень відзначимо статтю [10], де розглядається розрахунок напружено-деформованого стану гнутих кільцевих пластин з урахуванням пошкодження матеріалу при повзучості. Цікавою є робота [11], де дано численні приклади розрахунків пластин різних схем. Чеські автори [12] аналізують динамічний вплив рухомого навантаження на кільцеву плиту чисельним методом. У статті [13] пропонується математична модель осесиметричного поперечного вигину кільцевої пластини середньої товщини. Вільні коливання кільцевої пластини змінної товщини при її вільному спіранні розглядається в [14].

**Мета.** Метою даної роботи є аналітичне та чисельне дослідження вигину кільцевих пластин на змінній пружній основі.

**Матеріали та методи.** Використовується аналітичний метод прямого інтегрування та комп'ютерне моделювання у ПК ЛІРА-САПР з наступними розрахунками методом скінчених елементів. Розглянуто два приклади: сталева плита, яка жорстко защемлена за внутрішнім контуром, а її зовнішній контур спирається шарнірно, та бетонна плита, яка жорстко затиснена по зовнішньому контуру, а її внутрішній контур закріплений шарнірно.

### Результати та обговорення.

У кільцевій пластині постійної циліндричної жорсткості  $D$ , що лежить на змінній пружній основі, та перебуває під дією безупинно розподіленого довільного поперечного навантаження, будуть виникати внутрішні зусилля: радіальний згинальний момент  $M_r$ , окружний згинальний момент  $M_\theta$  і радіальна поперечна сила  $Q_r$  (рис. 1).

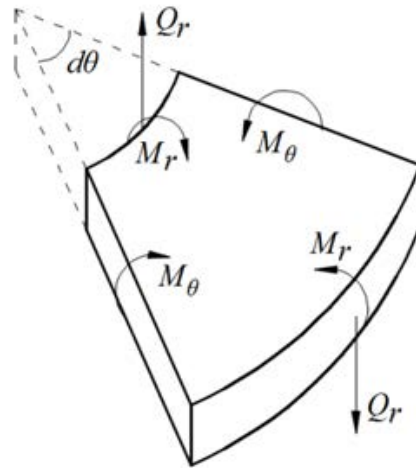


Рис. 1. Зусилля в кільцевій пластині

Позначимо через  $a$  і  $b$  радіуси зовнішньої й внутрішньої окружностей пластини,  $r$  — радіальну координату ( $0 \leq r \leq a$ ),  $q(r)$  — довільне поперечне навантаження,  $R(r)$  — реакцію пружної основи.

Нехай  $k_0, q_0$  — значення коефіцієнта постелі й навантаження в деякій характерній точці пластини.

Коефіцієнт постелі  $k(r)$  й навантаження  $q(r)$  представимо у вигляді [15]:

$$k(r) = k_0 \left( A_0 + A_1 \left( \frac{r}{a} \right) + A_2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \dots + A_s \left( \frac{r}{a} \right)^s \right); \quad (1)$$

$$q(r) = q_0 \left( B_0 + B_1 \left( \frac{r}{a} \right) + B_2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \dots + B_p \left( \frac{r}{a} \right)^p \right). \quad (2)$$

Функція прогинів  $w(r)$  визначається у вигляді [15]

$$w(r) = \frac{q_0 a^4}{D} W(r); \quad (3)$$

$$W(r) = \lambda_1 X_1(r) + \lambda_2 X_2(r) + \lambda_3 Y_1(r) + \lambda_4 Y_2(r) + X_3(r), \quad (4)$$

де  $W(r)$  — безрозмірна функція, а  $\lambda_n$  — довільні безрозмірні константи.

$$Y_n(r) = X_n(r) \ln \frac{r}{a} + Z_n(r) \quad (n=1,2). \quad (5)$$

Кут повороту та внутрішні зусилля  $M_r, M_\theta, Q_r$  [15]:

$$\frac{dw}{dr} = \frac{q_0 a^3}{D} \tilde{W}(r); \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = \frac{q_0 a^2}{D} \hat{W}(r); \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = \frac{q_0 a}{D} \hat{W}(r); \quad (6)$$

$$M_r = -q_0 a^2 \left( \hat{W}(r) + \mu \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (7)$$

$$M_\theta = -q_0 a^2 \left( \mu \hat{W}(r) + \frac{a}{r} \tilde{W}(r) \right); \quad (8)$$

$$Q_r = -q_0 a \left( \hat{W}(r) + \frac{a}{r} \hat{W}(r) - \left( \frac{a}{r} \right)^2 \tilde{W}(r) \right). \quad (9)$$

Таким чином, визначення прогинів і внутрішніх зусиль у пластині зводиться до обчислення значень функцій  $X_n(r)$ , ( $n=1,2,3$ ),  $Z_n(r)$ , ( $n=1,2$ ), а також їх безрозмірних похідних  $\tilde{X}_n(r)$ ,  $\hat{X}_n(r)$ ,  $\hat{X}_n(r)$ , ( $n=1,2,3$ );  $\tilde{Z}_n(r)$ ,  $\hat{Z}_n(r)$ ,  $\hat{Z}_n(r)$ , ( $n=1,2$ ). Форма уявлення цих функцій докладно викладена в [15]. Перейдемо до чисельної реалізації алгоритму методу прямого інтегрування.

Приклад 1. Розглянемо сталеву плиту ( $E = 2,0 \cdot 10^8 \text{ kПа}$ ,  $\mu = 0,33$ ) товщиною  $h = 0,03 \text{ м}$ , зовнішнім радіусом  $a = 0,9 \text{ м}$ , внутрішнім радіусом  $b = 0,45 \text{ м}$ , яка перебуває під дією рівномірно розподіленого постійного навантаження  $q = 30 \text{ kПа}$ . Плита жорстко затиснена за внутрішнім контуром, а її зовнішній контур спирається шарнірно. Коефіцієнт постелі змінюється за лінійним законом:  $k(b) = 4000 \text{ kH / м}^3$ ,  $k(a) = 5000 \text{ kH / м}^3$  (рис. 2).

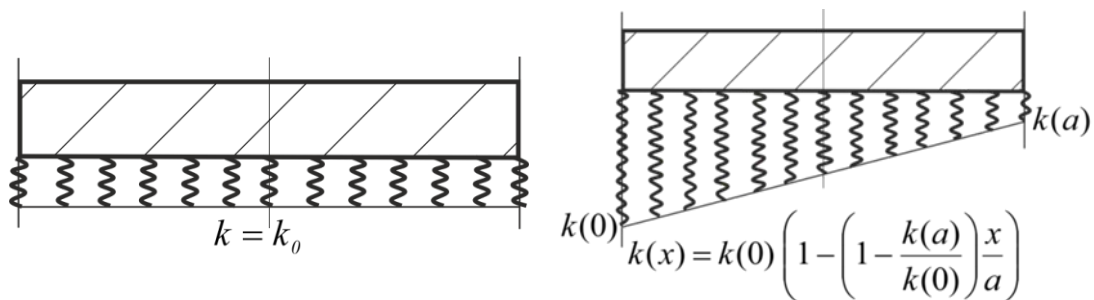


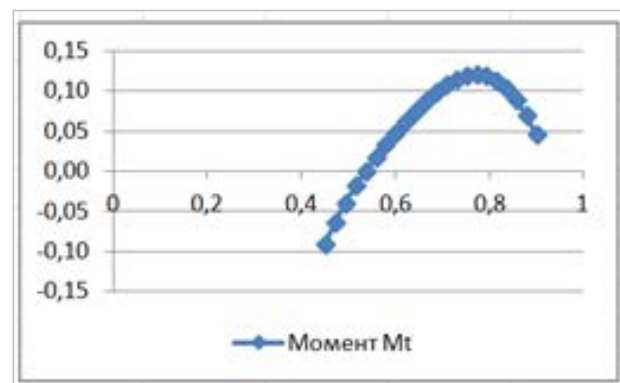
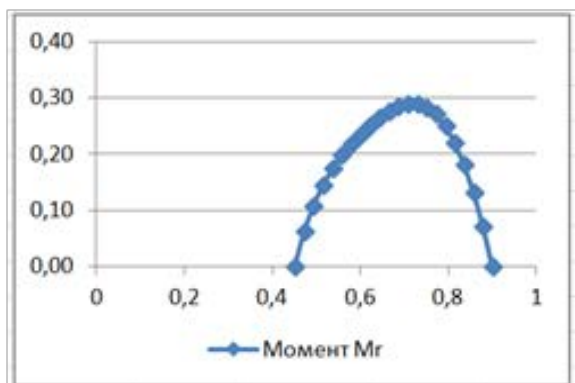
Рис. 2. Закони зміни коефіцієнту постелі

Результати розрахунків авторським методом (АМ) і методом скінчених елементів (МСЕ) у ПК ЛІРА-САПР наведені в табл. 1, а їх графічна інтерпретація — на рис. 3.

Таблиця 1

## Результати розрахунків сталеві плити

| $r, м$ | $w, м$ |        | Розбіжність, % | $M_r$  |        | Розбіжність, % | $M_\theta$ |         | Розбіжність, % |
|--------|--------|--------|----------------|--------|--------|----------------|------------|---------|----------------|
|        | МСЕ    | АМ     |                | МСЕ    | АМ     |                | МСЕ        | АМ      |                |
| 0,45   | 0,0018 | 0,0018 | 0,000          | 0,0000 | 0,0000 | 0,000          | -0,0911    | -0,0911 | 0,000          |
| 0,4714 | 0,0035 | 0,0036 | 0,351          | 0,0609 | 0,0612 | 0,471          | -0,0639    | -0,0639 | 0,005          |
| 0,4929 | 0,051  | 0,0052 | 0,355          | 0,1061 | 0,1080 | 1,790          | -0,0399    | -0,0401 | 0,467          |
| 0,5143 | 0,0066 | 0,0067 | 0,352          | 0,1401 | 0,1444 | 2,957          | -0,0188    | -0,0191 | 1,388          |
| 0,5357 | 0,0079 | 0,0080 | 0,352          | 0,1652 | 0,1734 | 4,749          | -0,0003    | -0,0003 | 2,678          |
| 0,5571 | 0,0090 | 0,0091 | 0,354          | 0,1898 | 0,1971 | 3,709          | 0,0163     | 0,0168  | 2,966          |
| 0,5786 | 0,0101 | 0,0101 | 0,373          | 0,2129 | 0,2173 | 2,034          | 0,0317     | 0,0327  | 3,187          |
| 0,6    | 0,0107 | 0,0108 | 0,384          | 0,2303 | 0,2349 | 1,966          | 0,0465     | 0,0476  | 2,272          |
| 0,6214 | 0,0112 | 0,0113 | 0,400          | 0,2404 | 0,2504 | 3,976          | 0,0611     | 0,0616  | 0,738          |
| 0,6429 | 0,0115 | 0,0116 | 0,405          | 0,2506 | 0,2640 | 5,078          | 0,0732     | 0,0746  | 1,838          |
| 0,6643 | 0,0115 | 0,0116 | 0,432          | 0,2546 | 0,2752 | 7,500          | 0,0831     | 0,0867  | 4,130          |
| 0,6857 | 0,0113 | 0,0114 | 0,449          | 0,2562 | 0,2836 | 9,669          | 0,0894     | 0,0974  | 8,173          |
| 0,7071 | 0,0109 | 0,0110 | 0,472          | 0,2597 | 0,2883 | 9,913          | 0,0975     | 0,1065  | 8,494          |
| 0,7286 | 0,0102 | 0,0103 | 0,533          | 0,2595 | 0,2884 | 10,030         | 0,1048     | 0,1136  | 7,702          |
| 0,75   | 0,0092 | 0,0093 | 0,552          | 0,2584 | 0,2827 | 8,625          | 0,1099     | 0,1183  | 7,111          |
| 0,7714 | 0,0080 | 0,0081 | 0,619          | 0,2501 | 0,2701 | 7,415          | 0,1092     | 0,1201  | 9,103          |
| 0,7929 | 0,0067 | 0,0068 | 0,681          | 0,2281 | 0,2497 | 8,660          | 0,1071     | 0,1184  | 9,523          |
| 0,8143 | 0,0052 | 0,0052 | 0,757          | 0,1983 | 0,2203 | 9,978          | 0,1048     | 0,1128  | 7,123          |
| 0,8357 | 0,0036 | 0,0036 | 0,834          | 0,1639 | 0,1811 | 9,471          | 0,0970     | 0,1030  | 5,820          |
| 0,8571 | 0,0018 | 0,0018 | 0,917          | 0,1194 | 0,1316 | 9,299          | 0,0803     | 0,0886  | 9,382          |
| 0,8786 | 0,0018 | 0,0018 | 1,004          | 0,0641 | 0,0712 | 10,005         | 0,0611     | 0,0662  | 7,716          |
| 0,9    | 0,0035 | 0,0035 | 1,107          | 0,0000 | 0,0000 | 0,000          | 0,0424     | 0,0448  | 5,423          |

Рис. 3. Згинальні моменти  $M_r$  та  $M_\theta$ 

Приклад 2. Розглянемо бетонну плиту ( $E = 1,5 \cdot 10^7 \text{ кПа}$ ,  $\mu = 1/6$ ) товщиною  $h = 0,12 \text{ м}$ , зовнішнім радіусом  $a = 1,8 \text{ м}$ , внутрішнім радіусом  $b = 0,9 \text{ м}$ , яка

перебуває під дією рівномірно розподіленого постійного навантаження  $q = 80 \text{ кПа}$ . Плита жорстко затиснута по зовнішньому контуру, а її внутрішній контур закріплений шарнірно.

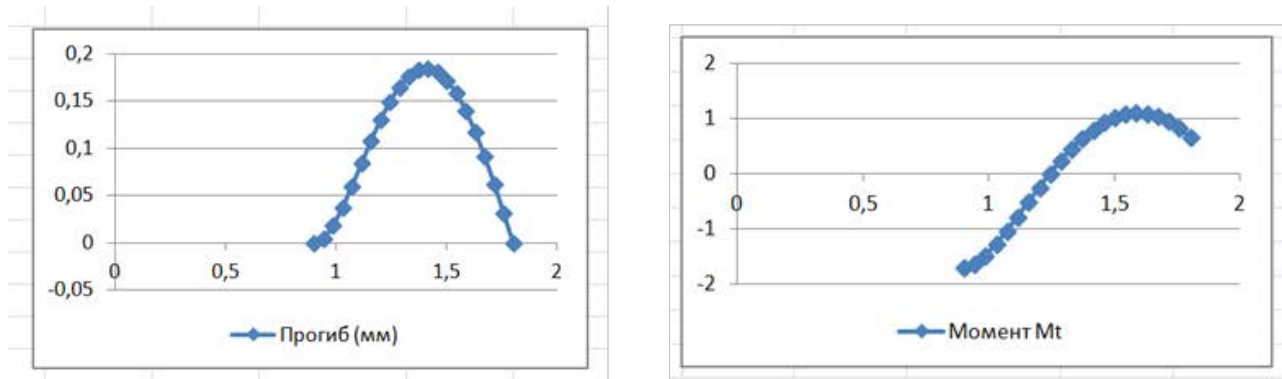
Коефіцієнт постелі (рис. 2) постійний:  $k(r) = \text{const} = 5000 \text{ кН} / \text{м}^3$ .

Результати розрахунків авторським методом (АМ) і методом скінчених елементів (МСЕ) у ПК ЛІРА-САПР наведені в табл. 2, а їх графічна інтерпретація — на рис. 4.

Таблиця 2

## Результати розрахунків бетонної плити

| $r, \text{ м}$ | $w, \text{ м}$ |        | Розбіжність, % | $M_r$   |         | Розбіжність, % | $M_\theta$ |         | Розбіжність, % |
|----------------|----------------|--------|----------------|---------|---------|----------------|------------|---------|----------------|
|                | МСЕ            | АМ     |                | МСЕ     | АМ      |                | МСЕ        | АМ      |                |
| 0,9            | 0,0000         | 0,0000 | 0,000          | 0,0000  | 0,0000  | 0,000          | -1,2844    | -1,2889 | 0,346          |
| 0,9429         | 0,0310         | 0,0310 | 0,351          | 1,1440  | 1,2140  | 5,769          | -0,9858    | -0,9908 | 0,500          |
| 0,9857         | 0,0603         | 0,0604 | 0,355          | 2,0607  | 2,1951  | 6,122          | -0,6895    | -0,6944 | 0,699          |
| 1,0286         | 0,0870         | 0,0872 | 0,352          | 2,7686  | 2,9663  | 6,666          | -0,4059    | -0,4096 | 0,904          |
| 1,0714         | 0,1101         | 0,1105 | 0,352          | 3,2738  | 3,5466  | 7,692          | -0,1424    | -0,1440 | 1,132          |
| 1,1143         | 0,1292         | 0,1297 | 0,354          | 3,5811  | 3,9516  | 9,375          | 0,0952     | 0,0965  | 1,373          |
| 1,1571         | 0,1438         | 0,1443 | 0,373          | 4,0124  | 4,1947  | 4,347          | 0,3029     | 0,3079  | 1,635          |
| 1,2            | 0,1536         | 0,1542 | 0,384          | 4,0348  | 4,2870  | 5,882          | 0,4774     | 0,4868  | 1,928          |
| 1,2429         | 0,1585         | 0,1591 | 0,400          | 3,9887  | 4,2380  | 5,882          | 0,6164     | 0,6306  | 2,247          |
| 1,2857         | 0,1586         | 0,1593 | 0,405          | 3,7313  | 4,0558  | 8,000          | 0,7183     | 0,7376  | 2,619          |
| 1,3286         | 0,1542         | 0,1549 | 0,432          | 3,3988  | 3,7474  | 9,302          | 0,7816     | 0,8062  | 3,047          |
| 1,3714         | 0,1457         | 0,1464 | 0,449          | 3,0171  | 3,3188  | 9,090          | 0,8058     | 0,8355  | 3,550          |
| 1,4143         | 0,1336         | 0,1342 | 0,472          | 2,6222  | 2,7753  | 5,517          | 0,7905     | 0,8248  | 4,160          |
| 1,4571         | 0,1183         | 0,1189 | 0,533          | 2,0103  | 2,1215  | 5,240          | 0,7370     | 0,7735  | 4,715          |
| 1,5            | 0,1007         | 0,1013 | 0,552          | 1,3003  | 1,3613  | 4,518          | 0,6447     | 0,6813  | 5,366          |
| 1,5429         | 0,0818         | 0,0823 | 0,619          | 0,4826  | 0,4982  | 3,139          | 0,5145     | 0,5481  | 6,127          |
| 1,5857         | 0,0623         | 0,0628 | 0,721          | -0,4467 | -0,4645 | 3,832          | 0,3479     | 0,3736  | 6,877          |
| 1,6286         | 0,0435         | 0,0439 | 0,887          | -1,4708 | -1,5243 | 3,508          | 0,1462     | 0,1580  | 7,482          |
| 1,6714         | 0,0266         | 0,0269 | 1,044          | -2,6015 | -2,6786 | 2,879          | -0,0900    | -0,0987 | 8,800          |
| 1,7143         | 0,0127         | 0,0129 | 1,187          | -3,8510 | -3,9251 | 1,889          | -0,3666    | -0,3965 | 7,547          |
| 1,7571         | 0,0034         | 0,0035 | 1,409          | -5,1053 | -5,2618 | 2,974          | -0,6701    | -0,7351 | 8,838          |
| 1,8            | 0,0000         | 0,0000 | 0,000          | -6,5390 | -6,6868 | 2,210          | -1,0069    | -1,1144 | 9,644          |

Рис. 4. Прогин та згинальний момент  $M_{\theta}$ 

### Висновки

Аналіз табл. 1 показує, що значення прогинів практично збігаються при розрахунках кільцевої пластини (при зазначених вище умовах) авторським методом і методом скінчених елементів у ПК ЛІРА-САПР, а розбіжність значень згинальних моментів досягає 10 %. Причому, розбіжність у прогинах проявляється тільки в четвертому (а іноді й у п'ятому) знаку після коми. І в другому розглянутому прикладі прогини, обчислені двома методами, практично не відрізняються друг від друга (табл. 2), а розбіжність згинальних моментів тут трохи менше, чим у попередньому прикладі (максимальна розбіжність — 9,6 %).

Слід зазначити, що метод прямого інтегрування продемонстрував дуже високу точність при розв'язку численних завдань, що мають точний розв'язок. Отримана тут розбіжність у значеннях згинальних моментів пов'язана з напівавтоматичною розбивкою скінчено-елементної сітки в ПК ЛІРА-САПР. Таке твердження ґрунтується на тому, що при згущенні сітки в окружному напрямку відбувається істотне зближення результатів, отриманих двома методами при визначенні радіальних і окружних згинальних моментів.

### Список літератури

1. И.Г. Бубнов, “Труды по теории пластин”, М.: Гостехфиздат. 1953. 423 с.
2. Б.Г. Галеркин, “Упругие тонкие плиты”, М.: Госстройиздат, 1933. 371 с.
3. С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер, “Пластини и оболочки”, М.: Наука, 1966. 636 с.
4. А.А. Гольденвейзер, “Теория упругих тонких оболочек”, М.: Наука. 1976. 512 с.
5. Ф. Дишингер, “Оболочки. Тонкостенные железобетонные купола и своды”: пер. с нем. ред.: П.Я. Каменцев и др. М.; Л.: Гос. научно-техн. изд-во строит. индустрии и судостроения, 1932. 272 с.

6. В. Флюгге, “Статика и динамика оболочек”, М.: Государственное издательство литературы по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1961. 306 с.
7. Л.Г. Доннелл, “Балки, пластины и оболочки”, пер. с англ. Л. Г. Корнейчука под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1982. 567 с.
8. А. Грин, Дж.М. Адкинс, “Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды”, М.: Мир, 1965. 455 с.
9. В.Т. Койтер, “Общие теоремы теории упруго-пластических сред” Из сборника “Успехи механики твердого тела”, под ред. И. Снеддона и Р. Хилла, пер. с англ. В. И. Розенблюма. Москва: Изд-во иностр. лит., 1961. Т. 1. 79 с.
10. V.A. Zaev, A.F. Nikitenko, “Calculation of the stress-strain state of bent annular plates taking account of material damage during creep”, *J Appl Mech Tech Phys* Vol. 34, pp. 423–426, (1993). <https://doi.org/10.1007/BF00864797>
11. А.И. Громовик, “Расчет круглых пластин”, Методические указания к выполнению курсовой работы для студентов специальности Двигатели внутреннего сгорания (ДВС). Омск: Изд-во СибАДИ, 2011. 33 с.
12. Daniela Kuchárová, Gabriela Lajčáková. “Moving Load Effect on Concrete Slab”. *Procedia Engineering*, Vol. 190, pp. 326 – 333, 2017.
13. А.А. Трещев, Е.А. Журин, “Изгиб кольцевых пластин из ортотропного нелинейно разносопротивляющегося материала”, *Строительство и реконструкция*, Vol. (4), pp. 48-63, 2019. <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-84-4-48-63>
14. S. Javed, “Natural Frequencies Calculation of Composite Annular Circular Plates with Variable Thickness Using the Spline Method”, *J. Compos. Sci.* Vol. 6, 70, 2022. <https://doi.org/10.3390/jcs6030070>
15. Y.S. Krutii, M.G. Surianinov, G.S. Karnaukhova, “Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations”, *Strength of Materials*, Vol. 53(2), pp. 247–257, 2021.

Doctor of Science, Professor **Mykola Surianinov**,  
Doctor of Science, Professor **Yurii Krutii**, **Dariya Kirichenko**, **Oleksii Klimenko**,  
Odesa State Academy of Civil Engineering and Architecture, Odesa

### TO THE CALCULATION OF RING PLATES ON A VARIABLE ELASTIC BASE

The article examines the bending of ring plates on a variable elastic base. There are different models of elastic base. The simplest is the Winkler model, or the spring model. For beams on a constant elastic base, this model allows obtaining an



exact solution, but not for slabs. The case is even more complicated when the elastic basis is variable. There is no single approach to building a universal analytical solution. Therefore, numerical calculation methods are used in engineering practice. The analytical method of direct integration and computer modeling in PC LIRA-CAD with subsequent calculations by the method of finite elements are used. Two examples are considered: a steel plate, which is rigidly clamped along the inner contour, and its outer contour is hinged, and a concrete slab, which is rigidly clamped along the outer contour, and its inner contour is hinged. The results of the numerical implementation show that the values of deflections when calculated by the author's method and the method of finite elements in PC LIRA-CAD practically coincide, and the difference in the values of bending moments reaches 10%. Moreover, the difference in deflections is manifested only in the fourth (and sometimes in the fifth) sign after the comma. It is noted that the method of direct integration demonstrated very high accuracy when solving numerous test problems that have an exact solution. The authors explain the discrepancy in the values of the bending moments obtained here by the semi-automatic breakdown of the finite-element mesh in PC LIRA-CAD. This statement is based on the fact that when the mesh is thickened in the circumferential direction, the results obtained by the two methods for determining the radial and circumferential bending moments are substantially converged.

Keywords: direct integration method; ring plate; elastic base; Winkler model; variable bed coefficient; finite element method; PC LIRA-CAD.

## REFERENCES

1. I.G. Bubnov, "*Trudy po teorii plastin*", M.: Gostekhfizdat, 1953. {In Russian}.
2. B.G. Galerkin, "*Uprugiy tonkiy plity*", M.: Gosstroyizdat, 1933. {In Russian}.
3. S.P. Timoshenko, S. Voynovskiy-Kriger, "*Plastiny i obolochki*", M.: Nauka, 1966. {In Russian}.
4. A.A. Goldenveyzer, "*Teoriya uprugikh tonkikh obolochek*", M.: Nauka, 1976. {In Russian}.
5. F. Dishinger, "*Obolochki. Tonkostennyye zhelezobetonnyye kupola i svody*", pod red.: P.Ya. Kamentsev i dr. M. L.: Gos. nauchno-tekhn. izd-vo stroit. industrii i sudostroyeniya, 1932. {In Russian}.
6. V. Flyugge, "*Statika i dinamika obolochek*", M.: Gosudarstvennoye izdatelstvo literatury po stroitelstvu. arkhitekture i stroitelnyim materialam, 1961. {In Russian}.
7. L.G. Donnell, "*Balki. plastiny i obolochki*", per. s angl. L.G. Korneychuka: pod red. E.I. Grigolyuka, M.: Nauka, 1982. {In Russian}.

8. A.Grın, Dzh.M. Adkins, “*Bolshiye uprugıye deformatsii i nelineynaya mekhanika sploshnoy sredy*”, M.: Mir, 1965. {In Russian}.
9. V.T. Koyter, “*Obshchiye teoremy teorii uprugı-plasticheskikh sred*” Iz sbornika "Uspekhi mekhaniki tverdogo tela". pod red. I. Sneddona i R. Khilla, Moskva: Izd-vo inostr. Lit, 1961. {In Russian}.
10. V.A. Zaev, A.F. Nikitenko, “Calculation of the stress-strain state of bent annular plates taking account of material damage during creep”, *J Appl Mech Tech Phys*, Vol. 34, pp. 423–426, 1993. <https://doi.org/10.1007/BF00864797>. {in English}.
11. A.I. Gromovik, “*Raschet kruglykh plastin*”, Metodicheskiye ukazaniya k vypolneniyu kursovoy raboty dlya studentov spetsialnosti Dvigateli vnutrennego sgoraniya (DVS). Omsk: Izd-vo SibADI. 2011. {In Russian}.
12. D. Kuchárová, G. Lajčáková, “Moving Load Effect on Concrete Slab”, *Procedia Engineering*, Vol. 190, pp. 326 – 333, 2017. {in Slovak}.
13. A.A. Treshchev, E.A. Zhurin, “Izgib koltsevykh plastin iz ortotropnogo nelineyno raznosoprotivlyayushchegosya materiala”, *Stroitelstvo i rekonstruktsiya*, Vol. 4, pp. 48-63, 2019, <https://doi.org/10.33979/2073-7416-2019-84-4-48-63>. {In Russian}.
14. S. Javed, “Natural Frequencies Calculation of Composite Annular Circular Plates with Variable Thickness Using the Spline Method”, *J. Compos. Sci.* Vol. 6, 70, 2022. <https://doi.org/10.3390/jcs6030070>. {in English}.
15. Y.S. Krutii, M.G. Surianinov, G.S. Karnaukhova, “Calculation Method for Axisymmetric Bending of Circular and Annular Plates on a Changeable Elastic Bed. Part 1. Analytical Relations”, *Strength of Materials*, Vol. 53(2), pp. 247–257, 2021. {in English}.