DOI: 10.32347/2076-815x.2023.82.185-197
УДК 539.3

к.т.н., доцент **Кошевий О.П.**,
380939339872@yandex.ua, ORCID: 0000-0002-7796-0443,
Левківський Д.В., levkivskyi.dv@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-2964-1605,
Янсон М.О., iansons.mo@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6174-0403,
Чубарев А.Г., Chubarev_ah@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-6620-639X,
Марчук О.С., Marchuk.os@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0002-2497-1405,
Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕМПЕРАТУРНИХ ВПЛИВІВ В МАСИВНИХ ТІЛАХ ЗА ДОПОМОГОЮ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДА ПРЯМИХ

Приведено основні ідеї та можливості модифікованого методу прямих, для моделювання температурних впливів в масивних тілах. Прийнято розрахункову модель прямокутного бруса з визначеним тепловим станом. Застосована процедура зниження вимірності вихідних рівнянь за допомогою модифікованого метода прямих та метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова для граничних умов. Наведені редуковані рівняння теплопровідності і редуковане рівняння теплового балансу. Зроблено висновки, щодо доповнення редукованих рівнянь другого порядку складовими з граничних умов на бокових поверхнях і наведені остаточно редуковані рівняння другого порядку по просторовим змінним.

Ключові слова: модифікований метод прямих; термопружність; температурне поле; базисні функції; проекційний метод; граничні умови.

Розглядається брус прямокутного поперечного перерізу (Рис.1), три габаритні розміри якого, одного порядку [1]. Тепловий стан такого об’єкта тривимірний і тому описується системо, за допомогою тривимірних рівнянь теплопровідності.

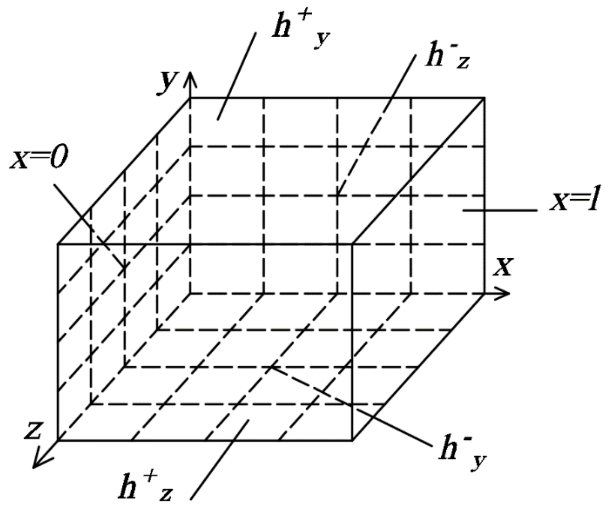

Рис.1.

При застосуванні модифікованого метода прямих для зниження вимірності вихідних рівнянь, зручно використовувати їх у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку по просторових координатах.

В даному випадку це рівняння Фур'є:

$$q_x(x,y,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x};$$
$$q_y(x,y,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y}; \qquad (1)$$
$$q_z(x,y,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z}.$$

Та рівняння теплового балансу:

$$\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial T} = -\frac{\partial q_x(x,y,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial q_y(x,y,z,t)}{\partial y} - \frac{\partial q_z(x,y,z,t)}{\partial z} + Q(x,y,z,t) \qquad (2)$$

Розрахункові функції, що входять до цих рівнянь, повинні задовольняти граничним умовам, за які зручно прийняти умови конвективного теплообміну на граничних поверхнях вибраного тіла з оточуючим середовищем:

$$q_x(0,y,z,t) - q^0(y,z,t) = \alpha_T^0(T(0,y,z,t) - \theta^0(y,z,t)) \qquad (3)$$
$$q_x(l,y,z,t) - q^l(y,z,t) = \alpha_T^l(T(l,y,z,t) - \theta^l(y,z,t)) \qquad (4)$$
$$q_y(0,h_y^-,z,t) - q_x(0,h_y^-,z,t) = \alpha_T^{h_y^-}(T(x,h_y^-,z,t) - \theta(h_y^-,z,t)) \qquad (5)$$
$$q_y(0,h_y^+,z,t) - q_x(0,h_y^+,z,t) = \alpha_T^{h_y^+}(T(x,h_y^+,z,t) - \theta(h_y^+,z,t)) \qquad (6)$$
$$q_z(0,y,h_y^-,t) - q_z(x,y,h_y^-,t) = \alpha_T^{h_z^-}(T(x,y,h_z^-,t) - \theta(x,y,h_z^-,t)) \qquad (7)$$
$$q_z(0,y,h_y^+,t) - q_z(x,y,h_y^+,t) = \alpha_T^{h_z^+}(T(x,y,h_z^+,t) - \theta(x,y,h_z^+,t)) \qquad (8)$$

Тут: λ_T– коефіцієнт теплопровідності; α_T – коефіцієнт конвективного теплообміну на відповідній позначенням площині. Якщо $\alpha \to 0$ граничні умови перетворюються на граничні умови другого роду (задано тепловий потік з відповідної граничної площини); якщо $\alpha \to \infty$, то задано граничні умови першого роду (задано значення температурної функції на відповідній граничній площині).

Шукана температурна функція повинна задовольняти початковій умові: при *t=0*, $T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z,0)$, де $T_0(x,y,z,0)$ – відоме початкове значення температурної функції в кожній точці тіла.

Згідно модифікованого метода прямих [4, 5] на брус наноситься дві системи прямих, паралельних до координатних осей *Oy* та *Oz* (передбачається зниження вимірності по просторовим змінним y та z). Вибір таких прямих обумовлений тим, що редуковані рівняння будуть залежати від змінних x та t, тобто будуть нагадувати одновимірні рівняння одновимірної нестаціонарної задачі теплопровідності, для яких на даний час в літературі по математичній фізиці розроблено ефективні та зручні чисельні методи, до застосування яких нескладно адаптувати редуковані рівняння [1]. Вибір прямих також узгоджується з граничними умовами. Граничні умови на граничних площинах: $y = h_y^-, y = h_y^+, z = h_y^-, z = h_y^+$, можна переписати в наступному вигляді, прив'язуючи позначення до вибраних прямих.

В якості базисних функцій, пов'язаних з вибраними прямими по змінній y та змінній z вибираємо локально зосереджені функції. Системи цих функцій по y та z є косокутними відносно скалярного добутку по змінній y та z, тому в даній роботі використовуються тензорні позначення та дії над векторами, докладно описані в нашій роботі [5]. Це значно спрощує побудову редукованих рівнянь. Зниження вимірності по двох просторових змінних виконуємо окремо по кожній із змінних – y та z, причому незалежно в якій послідовності. При зниженні вимірності по y всі інші змінні вважаються параметрами, аналогічно при зниженні вимірності по z.

Для зниження вимірності використовується проекційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова. Оскільки граничні умови (3) – (8) є природніми, то це дозволяє використовувати в проекційному методі базисні функції, що не задовольняють ніяким граничним умовам.

Спочатку будемо знижувати вимірність по змінній y. Кожне рівняння закону Фур'є помножимо на базисну функцію $\varphi^i(y), i = ly...Ny$.

Зниження вимірності виконуємо спочатку по одній змінній – а саме по y, потім отримані редуковані рівняння будемо редукувати по другій координаті – а саме по z.

Слід зазначити , що зі змінною y будемо пов'язувати індекси $i, j, \alpha, \beta, \gamma = \overline{ly, Ky}$, а зі змінною z – індекси $k, l, \xi, \eta, \chi = \overline{lz, Kz}$.

Зниження вимірності по змінній y: помножимо скалярно кожне рівняння на $\varphi^i(y)$, за допомогою операції опускання індексу $\varphi^i = g^{ij}\varphi_j(y)$ перейдемо до коваріантного базиса зниження вимірності рівнянь закону Фур'є – і після нескладних операцій отримаємо:

$$\left\{ q_x(x,y,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x}, \varphi^i(y) \right\} = \int_{h_y^-}^{h_y^+} \left(-\lambda_T \int_{h_y^-}^{h_y^+} q(x,y,z,t) \right) \varphi^i_{(y)}(y)dy =$$
$$-\lambda_T \zeta \partial T(x,y,z,t) \cdot \varphi^i_{(y)}(y)dy \Rightarrow q^i_x(x,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T^i(x,z,t)}{\partial x} \quad (9)$$

Одновимірне по просторовій координаті рівняння нестаціонарної теплопровідності успішно розв'язується за допомогою явної або неявної різницевих схем, алгоритми застосування яких детально досліджені та апробовані в монографіях по чисельним методам математичної фізики [3].

Застосування модифікованого метода прямих для зниження вимірності вихідних рівнянь, дозволяє з двовимірних та тривимірних по просторових змінних. Головна властивість редукованих рівнянь полягає в тому, що їх структура схожа на структуру вихідних рівнянь, що не вимагає складної реконструкції чисельних алгоритмів, розроблених для розв'язування рівнянь малої вимірності і відповідних питань стосовно збіжності чисельних алгоритмів.

Для того щоб редукувати рівняння плоскої задачі нестаціонарної теплопровідності, або просторової, треба та відкинути редукцію по z.

Аналогічно редукуємо рівняння теплового балансу:

$$\left(\left(\rho c\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t}=-\frac{\partial q_x(x,y,z,t)}{\partial x}-\frac{\partial q_y(x,y,z,t)}{\partial y}-\frac{\partial q_z(x,y,z,t)}{\partial z}\right),\varphi^i_{(y)},\varphi^k_{(z)}\right)\quad(10)$$

Оскільки результат проектування не залежить від послідовності проектування по y та по z, тому будемо вибирати таку послідовність, при якій зручніше робити перетворення. Оскільки перша складова рівняння теплопровідності не має похідних по y та по z, то найпростіше почати зниження вимірності з цієї складової:

$$\left(\rho c\frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t},\varphi^i_{(y)},\varphi^k_{(z)}\right)=\left(\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\rho cT\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}(x,y,z,t)\right)\cdot\varphi^i_{(y)}\cdot\varphi^k_{(z)}=\rho c\frac{\partial}{\partial t}T^ik(x,t)\qquad(11)$$

Аналогічно проектується друга складова:

$$\left(\frac{\partial q_x(x,y,z,t)}{\partial x},\varphi^i_{(y)},\varphi^k_{(z)}\right)=\frac{\partial q_x^{ik}(x,t)}{\partial x}\qquad(12)$$

Так само отримуємо редуковану праву частину:

$$Q(x,y,z,t)\Rightarrow Q^{ik}_{(x,t)}\qquad(13)$$

Редуковані рівняння будуємо в коефіцієнтах [1]. Для цього вихідні рівняння скалярно множимо на базисні функції взаємного базиса. Якщо складова рівняння не залежить від похідної по змінній, по якій знижується вимірність, то ця змінна вважається параметром. Змінна за якою знижується вимірність визначає вектор (або тензор) редукованої функції, що позначається відповідним індексом. Це стосується першого з рівнянь закону Фур'є та лівої частини рівняння теплового балансу:

$$\left\{q_x=-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial x},\varphi^i(y)\right\}\to\left\{q_x^i=-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial x}\right\}\left\{\rho c\frac{\partial T}{\partial x},\varphi^i(y)\right\}\to\rho c\frac{\partial T^i}{\partial x}\qquad(14)$$

Далі аналогічно при зниженні по z:

$$\left(q_x^i(x,z,t) = -\lambda_T \frac{\partial T^i}{\partial x}(x,z,t)\right)\varphi_z^{(z)} \to q_x^{ik}(x,t) = -\lambda_T \frac{\partial T^{ik}(x,z,t)}{\partial x}\cdot$$

$$\cdot\left\{\rho c \frac{\partial T^i(x,z,t)}{\partial t}, \varphi^k(z) \to \rho c \frac{\partial T^{ik}(x,t)}{\partial t}\right\}$$

$$\left(q_y = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial x}\right) \to q_x^i = \lambda \int_{h_y^-}^{h_y^+} \frac{\partial T}{\partial y}\varphi^i{}_{(y)} dy \to \left(q_y^i(x,z,t) - \lambda \int_{h_y^-}^{h_y^+} T^\alpha(x,z,t)\varphi_\alpha(y) gij \varphi_j(y)\right)$$

$$\to \left(q_y^i(x,z,t) - \lambda_T gij \int_{h_y^-}^{h_y^+} \varphi_\alpha(y)\varphi_j(y) dy T^\alpha(x,z,t)\right) \to -\lambda_T gij b_{j\alpha} T^\alpha(x,z,t)$$

Далі по y:

$$\left(q_y = -\lambda g_{ig} b_{j\alpha} T^i(x,z,t), \varphi^k{}_{(z)}\right) \to \left(q_y^{ik}(x,t) = -\lambda_T gij b_{j\alpha} T^{\alpha k}(x,t)\right)^{b_{j\alpha}} = \int_{h_y^-}^{h_y^+} \varphi^\alpha(y)\varphi(y) dy$$

Враховуючи, що: $b_{j\alpha} = \int_{h_y^-}^{h_y^+} \varphi_j(y)\varphi_\alpha(y) dy, b_{l\xi} = \int_{h_z^-}^{h_z^+} \varphi_l(z)\varphi_\xi(z) dz$

Далі інтегруємо вирази, які включають похідні по y, або по z.

До редукованих рівнянь входять складові, які можна виключити за допомогою граничних умов на бокових площинах, записаних у формі (14).

Кожне з цих співвідношень враховує три складові, які враховують граничні умови на бокових площинах. Перша складова враховує компоненту невідомої функції – T^{i1y} – температуру на боковій площині *1y* і входить в перше рівняння системи редукованих рівнянь. Компонента T^{iNy}– входить до відповідного рівняння; компоненти T^{i1y} та T^{iNy} входять до одного з відповідних рівнянь.

Компоненти $-\theta$ та $+q_y$ – відомі компоненти температури зовнішнього середовища та теплового потоку зовнішнього середовища входять до відповідних рівнянь (відповідно індексам). Ці складові заносяться до об'ємної складової Q^{ik}, що разом позначається $\overline{Q}$.

З урахуванням вищеописаних зауважень система розрахункових редукованих рівнянь записується у вигляді:

$$b_{\chi l}\overline{T}^{\chi l}_{(x,t)} + \frac{\rho c}{\lambda_T}\frac{\partial \overline{T}^{ik}}{\partial t} = \partial^2 \overline{T}\frac{ik}{\partial x^2} + g^{ij} b_{\alpha j} g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} \overline{T}^\gamma(x,t) + g^{klb\xi} + \overline{Q}^{ik}.$$

Тут $\overline{T}^{ik}(x,y)$ – невідома редукована функція з додатковими коефіцієнтами за рахунок граничних умов на бокових площинах; $\overline{Q}^{ik}$ – це відомий об'ємний тепловий влив Q та додаткові впливи від граничних умов на бокових площинах.

Граничні умови на бокових площинах $y = h_y^-, y = h_y^+, z = h_z^-, z = h_z^+$, зручно переписати, прив'язавши їх позначення до позначень прямих:

$$q_y^{1y}(x,z,t) = \alpha_T^{1y}(T^{1y}(x,z,t) - \theta^{1y}(x,z,t)) + q_y^{1y}(x,z,t) \tag{15}$$
$$q_y^{Ny}(x,z,t) = \alpha_T^{Ny}(T^{Ny}(x,z,t) - \theta^{Ny}(x,z,t)) + q_y^{Ny}(x,z,t) \tag{16}$$
$$q_z^{1z}(x,z,t) = \alpha_T^{1z}(T^{1z}(x,z,t) - \theta^{1z}(x,z,t)) + q_z^{1z}(x,z,t) \tag{17}$$
$$q_z^{Nz}(x,z,t) = \alpha_T^{Nz}(T^{Nz}(x,z,t) - \theta^{Nz}(x,z,t)) + q_z^{Nz}(x,z,t) \tag{18}$$

Тут $1y, Ny, 1z, Nz$ - номери граничних прямих.

Граничні умови на торцевих площинах *x=0, x=l* редукуються по змінним у та *z*. Оскільки вони є алгебраїчними співвідношеннями то в редукованому вигляді замість змінних *y* та *z* в них з'являються відповідні індекси:

$$q_x^{ik}(0,t) - q_x^{ik}(0,t) = \alpha_T^0 T^{ik}(0,t) - \theta^{ik}(0,t) \tag{19}$$
$$q_x^{ik}(l,t) - q_x^{ik}(l,t) = \alpha_T^l T^{ik}(l,t) - \theta^{ik}(l,t) \tag{20}$$

До редукованих рівнянь, як випливає з редукування вихідної системи розрахункових рівнянь, не входять просторові змінні *y* та *z*, тому необхідно застосувати редукцію до рівнянь (9)-(12), що визначають граничні умови на бокових площинах.

Редукування ведеться по одній змінній, по *y*, або по *z*, замість яких з'являються відповідні індекси:

$$q_y^{1yk}(x,t) = \alpha_T^{1y}(T^{1yk}(x,t) - \theta^{1yk}(x,t)) + q_y^{1yk}(x,t) \tag{21}$$
$$q_y^{Nyk}(x,t) = \alpha_T^{Ny}(T^{Nyk}(x,t) - \theta^{Nyk}(x,t)) + q_y^{Nyk}(x,t) \tag{22}$$
$$q_z^{i1z}(x,t) = \alpha_T^{1z}(T^{i1z}(x,t) - \theta^{i1z}(x,t)) + q_z^{i1z}(x,t) \tag{23}$$
$$q_z^{iNz}(x,t) = \alpha_T^{Nz}(T^{iNz}(x,t) - \theta^{iNz}(x,t)) + q_z^{iNz}(x,t) \tag{24}$$

$$-g^{ij}\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial q_z}{\partial z}dz = dv \\ v = q_z \\ \varphi_j(y) = u \\ du = \varphi_j' dz \end{array}\right| = \left| -g^{ij}(q_z\varphi_j)\right|_{h_z^-}^{h_z^+}$$

Для двох останніх складових використання проекційного метода краще застосовувати в певній послідовності – спочатку застосовувати скалярний добуток на базисну функцію, по якій диференціюється дана складова, тобто для третьої складової спочатку скалярно множити на $\varphi^i(y)$ а після виконання необхідних перетворень на $\varphi^k(z)$:

$$\varphi^k(z):\left(\frac{\partial q_y(x,y,z,t)}{\partial y},\varphi_j(y)\right)=\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\frac{\partial q_y(x,y,z,t)}{\partial y}g^{ij}\varphi_j(y)=g^{ij}\left|\begin{aligned}&u=\varphi_j\\&\nu=q_y\\&du=\varphi_j'dy\\&d\nu=\frac{\partial^{\partial}q_y(x,y,z,t)}{\partial y}\end{aligned}\right|=$$

$$=-g^{\partial i}\delta_j^{Ny}q^{Ny}+g^{ij}\delta_j^{1y}q^{1y}-g^{ij}\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}q_{j\alpha}^1\left(\varphi_y^{i}\right)\varphi_y^{\alpha}dy=-g^{i1y}q^{1y}+g^{iN_y}q^{N_y}+g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha}$$

$$\left(-\frac{\partial q_y}{\partial y},\varphi_{(y)}^i\right)=\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi_{(y)}^i dy$$

На даному етапі перетворень рівняння використовується перетворення підінтегрального виразу за допомогою інтегрування частинами.

Безпосередньо підставляти під знак похідної розклад q_y по базису не можна, оскільки q_y тільки один раз диференційована на відміну від T, яка двічі диференційована. Рекомендується [4] в даному випадку пом’якшити інтегрування за допомогою інтегрування частинами. Тому маємо:

$$-\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi_y^i dy=-\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}g^{ij}\varphi_j(y)dy=-g^{ij}\left|\begin{aligned}&u=\varphi_j(y)\\&\nu=q_y\\&du=\varphi_j'dy\\&d\nu=\frac{\partial q_y}{\partial y}dy\end{aligned}\right|=-g^{ij}\left\{(\varphi_j(y)q_y)\Big|_{h_y^-}^{h_y^+}-\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}q_y\varphi_j dy\right\}=$$

$$=-g^{ij}\left(\delta_j^{Ny}q_y^{Ny}-\delta_j^{1y}q_y^{1y}\right)-g^{ij}\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}q_y^{\alpha}\varphi_i\varphi_j(y)dy=-\left(g^{iNy}q_y^{iNy}-g^{i1y}q_y^{1y}\right)-g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha}.$$

Тут позначено: $b_{\alpha j}=\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\varphi_\alpha\varphi_j$. Враховано тензорну операцію підстановки індекса: $\delta_j^{Ny}g^{ij}=g^{iNy},\delta_j^{1y}g^{ij}=g^{i1y}$.

Остаточно отримуємо: $-\int\limits_{h_y^-}^{h_y^+}\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi^i(y)dy=-\left(g^{iNy}q_y^{iNy}-g^{i1y}q_y^{1yk}\right)-g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha k}$, (25)

Після скалярного множення на $\varphi^k(z)$ отримаємо:

$$-\int_{h_y^-}^{h_y^+} \frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi^i(y)\varphi^k(z)dydz = -\left(g^{iNy}q_y^{iNyk} + g^{i1y}q_y^{1yk}\right) - g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha k}.$$

Редуковані рівняння теплопровідності частинних похідних першого порядку мають наступний вигляд – редуковані рівняння Фур'є:

$$q_x^{ik}(x,t) = -\lambda_T \frac{\partial T^i(x,t)}{\partial t} \tag{26}$$

$$q_y^{ik}(x,t) = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha(x,t) \tag{27}$$

$$q_z^{ik}(x,t) = -\lambda_T g^{kl} b_{j\xi} T^\alpha(x,t) \tag{28}$$

Редуковане рівняння теплового балансу:

$$\begin{aligned}\rho c\partial T^{ik}(x,t) &= -\lambda_T \frac{\partial q_x^{ik}(x,t)}{\partial x} - \lambda_T\left[-\left(g^i\nu_y q_y^{iNyk} + g^{i1y}q^{1yk}\right) - g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha k}\right] - \\ &-\lambda_T\left[-\left(g^k\nu_z q_z^{iNzk} + g^{k1z}q^{1zk}\right) - g^{kl}b_{\xi l}q_z^{i\xi}\right]\end{aligned} \tag{29}$$

$$-g^{kl}\left(\frac{\partial q_z}{\partial z}\varphi_l\right) = -g^{kl}\int_{h_z^-}^{h_z^+}\frac{\partial q_z}{\partial z}\varphi_l dz = \begin{vmatrix} u = \varphi_l(y) \\ \nu = q_z \\ du = \varphi_l'(z)dz \\ d\nu = \dfrac{\partial q_z}{\partial z}dz \end{vmatrix} =$$

$$= -g^{kl}\left\{u\nu\Big|_{h_z^-}^{h_z^+} - \int_{h_z^-}^{h_z^+} q_z\varphi_l(z)\Big|_{h_z^-}^{h_z^+} - \int_{h_z^-}^{h_z^+} q_z\varphi_l(z)dz\right\} = -g^{kl}\left\{\left(\delta_l^{Nz}q_z^{Nz} - \delta_l^{1z}q_z^{1z}\right) - \int_{h_z^-}^{h_z^+} q_z\varphi'(z)dz\right\} =$$

$$= -\left\{\left(g^{kNz}q_z^{Nz} - g^{k1z}q_z^{1z}\right) - \int_{h_z^-}^{h_z^+} q_z\varphi_\xi\varphi_l'(z)dz\right\}.$$

$$b_{\xi l} = \int_{h_z^-}^{h_z^+}\varphi_\xi(z)\varphi_l' dz.$$

Остаточно редуковане рівняння теплового балансу:

$$\frac{\rho c\partial T^{ik}}{\lambda_T\partial t} = -\frac{\partial q_x^{ik}}{\partial x} - g^{iNy}q_y^{iNy} + g^{i1y}q^{1yk} + g^{ij}b_{\alpha j}q_y^{\alpha k} - g^{kNz}q_z^{iNz} + g^{k1z}q^{1zk} + g^{kl}b_{\xi l}q_z^{i\xi} + Q^{ik} \tag{30}$$

Як правило, для побудови розв'язку рівнянь нестаціонарної теплопровідності використовують явні та неявні різницеві схеми, які будують для рівнянь в частинних похідних другого порядку. Побудуємо редуковані рівняння в частинних похідних другого порядку, виключаючи з редукованих рівнянь теплового балансу редуковані компоненти теплових потоків за допомогою редукованих рівнянь закону Фур'є, тобто виключаючи $q_x^{ik}(x,t), q_y^{ik}(x,t), q_z^{ik}(x,t)$.

Остаточно отримуємо:

$$\frac{\rho c}{\lambda_T}\frac{\partial T^{ik}(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 q_x^{ik} T^{ik}(x,t)}{\partial x^2} + g^{ij} b_{\alpha j} g^{\alpha\beta} b_{\beta\gamma} T^{\gamma}(x,t) + g^{kl} b_{\xi l} g^{\xi\eta} b_{\eta\chi} T^{\chi}(x,t) + \\ + g^{iNy} q_y^{iNyk} - g^{i1y} q_y^{i1y} + g^{kNz} q^{kNz} - g^{k1z} q_z^{k1z} + Q^{ik}(x,t) \tag{31}$$

Редуковані невідомі повинні задовольняти редукованим граничним умовам, які отримуються з вихідних граничних умов, заданих на торцевих площинах $x=0$, $x=l$. Це умови (3), (4). Оскільки розрахункові рівняння записані в похідних першого порядку, то граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями і це значно спрощує побудову редукованих граничних умов:

$$q_x^{ik}(0,t) - q^{0ik}(t) = \alpha_T^0 (T^{ik}(0,t) - \theta^{0ik}(0,t)) \tag{32}$$

$$q_x^{ik}(l,t) - q^{lik}(t) = \alpha_T^l (T^{ik}(l,t) - \theta^{lik}(l,t)) \tag{33}$$

Вихідні початкові умови в початковий момент часу відомий розподіл температурної функції в усіх точках об'єму тіла, що розглядається:

$$T(x,y,z,0) = T_0(x,y,z) \tag{34}$$

Початкові умови для редукованої задачі отримуємо проектуючи (34):

$$T^{ik}(x,0) = T_0^{ik}(x) \tag{35}$$

Таким чином, для дослідження температурного поля бруса ставиться початково-гранична задача – знайти розв'язок рівняння (31), якщо розв'язувальні редуковані функції задовольняються початковій умові (35) та граничним умовам (32), (33).

Редуковані рівняння другого порядку доповнюються певними складовими з граничних умов на бокових поверхнях (3), (4), в які підставляються співвідношення (34), (35). Вони доповнюються невідомими та відомими складовими, якими доповнюється права частина рівнянь.

Остаточно редуковані рівняння другого порядку по просторовим змінним мають вигляд (31), (32), (33). Розрахункові функції цих рівнянь повинні задовольняти умови (3) – (8) та початкові умови. Структурно з урахуванням тензорного характеру редуковані рівняння мало відрізняються від відповідних класичних рівнянь теплопровідності, що значно спрощує застосування чисельних методів для подальшого розв'язку.

Матричні коефіцієнти в редукованому вигляді за допомогою проекційного методу заміняють диференціальні оператори $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ та $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ і враховують відповідні початкові граничні умови на торцях.

Література

1. Самарский А.А., Николаев Е.С., Методы решения сеточных уравнений – Издательство «Наука», 1978. – 331 с., 164 с.

2. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. - М. 1981 - 255 с., 65 с.

3. Калиткин Н.Н., Численные методы – М. Изд. «Наука», 1978. - 334 с.

4. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Сович Ю.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О. Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 70 –К.: КНУБА, 2019 – 595-616 с.

5. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Сович Ю.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О. Чисельна реалізація модифікованого методу прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 74 –К.: КНУБА, 2020. – 341-359 с.

6. Чибіряков В.К., Кошевий О.П., Чубарев А.Г. Про один алгоритм для розв’язування задач термопружності на основі узагальненого метода прямих // BUILD-MASTER-CLASS-2018: Proceedings of international scientific-practical conference of young scientists. «Видавництво Ліра-К». – Вип. 74 –К.: КНУБА, 2018. – 190-191 с.

7. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013. – 613-624 с.

8. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010. – 413-423 с.

9. Токовий Ю.В., Бойко Д.С., Розв’язок тривимірної задачі термопружності для необмеженого трансверсально-ізотропного тіла // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2018. – 61, №4 – 88-99 с.

10. Шкелев Л.Т., Морсков Ю.А., Романова Т.А., Станкевич А.Н. /Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояний пластин и оболочек. – К.: КНУСА, 2002. – 177с.

11. Чубарев А.Г. Про застосування модифікованого метода прямих в задачах термопружності нетонких пластин // Н. т. збірник «Містобудування та територіальне планування», в. 80, К.: КНУБА, 2022р. – с.486-498.

12. Янсонс М.О. Застосування узагальненого методу прямих для дослідження динамічного напружено-деформованого стану кільцевих нетонких пластин // Н.т. збірник «Математичні проблеми технічної механіки – 2021» Міжнародна наукова конференція м. Дніпро, Кам'янське 2021р.

13. O. Koshevyi, D. Levkivskyi, V. Kosheva, A. Mozharovskyi Computer modeling and optimization of energy efficiency potentials in civil engineering // Strength of Materials and Theory of Structures, 274-281 p.

14. А. Кошевой Устойчивость пластин и оболочек сложной формы в магнитном поле. // Сопротивление материалов и теория сооружений, вип. 59, 65-71, 1991.

Ph.D., associate Professor **Kosheviy Oleksandr,**
Ph.D., associate Professor **Levkivskyi Dmytro,**
Yansons Marina, Chubarev Anton, Marchuk Oleksandr,
Kyiv national university of construction and architecture

SIMULATION OF TEMPERATURE EFFECTS IN MASSIVE BODIES USING THE MODIFIED METHOD OF LINES

This article presents the main ideas and possibilities of the modified straight line method for modeling temperature effects in massive bodies. The calculation model of a rectangular beam with a defined thermal state is adopted. The procedure for reducing the dimensionality of the original equations using the modified method of straight lines and the Bubnov-Galyorkin-Petrov method for boundary conditions is applied. The reduced equation of thermal conductivity and the reduced equation of heat balance are given. Conclusions are made regarding the addition of reduced second-order equations with components from the boundary conditions on the lateral surfaces, and finally reduced second-order equations in spatial variables are given.

We are considering a beam of rectangular cross-section, the three dimensions of which are of the same order. The thermal state of such an object is three-dimensional and is therefore described systematically using three-dimensional heat conduction equations. When applying the modified method of straight lines to reduce the dimensionality of the original equations, it is convenient to use them in the form of a system of partial differential equations of the first order in spatial coordinates.

According to the modified method of straight lines, two systems of straight lines parallel to the coordinate axes Oy and Oz are applied to the beam (a decrease in dimensionality in terms of spatial variables y and z is assumed). The choice of such straight lines is due to the fact that the reduced equations will depend on the variables x and t, that is, they will resemble the one-dimensional equations of the one-dimensional non-stationary problem of thermal conductivity, for which efficient and convenient numerical methods have been developed in the literature of mathematical physics at the moment, to which it is easy to adapt the reduced equation.

Keywords: modified method of straight lines; thermoelasticity; temperature field; basis functions; projection method; boundary conditions.

REFERENCES

1. Samarskiy A.A., Nikolaev E.S., Metodyi resheniya setochnyih uravneniy – Izdatelstvo «Nauka», 1978. – 331 s., 164 s. {in Russian}

2. Marchuk H.Y., Ahoshkov V.Y. Vvedenye v proektsyonno-setochnie metodi. (Introduction to projection-grid methods) – M. 1981 - 255, 65 s. {in Russian}

3. Kalitkin N.N., Chislennyie metodyi – Izdatelstvo «Nauka», 1978. – 334 s. {in Russian}

4. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Sovych Yu.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O. Modyfikovanyi metod priamykh, alhorytm yoho zastosuvannia, mozhlyvosti ta perspektyvy // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 70 –K.: KNUBA, 2019 – 595-616 s. {in Ukrainian}

5. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Sovych Yu.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O. Chyselna realizatsiia modyfikovanoho metodu priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 74 –K.: KNUBA, 2020. – 341-359 s. {in Ukrainian}

6. Chybiriakov V.K., Koshevyi O.P., Chubarev A.H. Pro odyn alhorytm dlia rozviazuvannia zadach termopruzhnosti na osnovi uzahalnenoho metoda priamykh // BUILD-MASTER-CLASS-2018: Proceedings of international scientific-practical conference of young scientists. «Vydavnytstvo Lira-K». – Vyp. 74 –K.: KNUBA, 2018. – 190-191 s. {in Ukrainian}

7. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Levkivskyi D.V. Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnian teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 46 –K.: KNUBA, 2013. – 613-624 s. {in Ukrainian}

8. Stankevych A.M., Chybiriakov V.K., Shkelov L.T., Levkivskyi D.V. Do znyzhennia vymirnosti hranychnykh zadach teorii pruzhnosti za metodom priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 36 – K.: KNUBA, 2010. – 413-423 s. {in Ukrainian}

9. Tokoviy Yu.V., Boyko D.S., Rozv'yazok trivimirnoyi zadachi termopruzhnosti dlya neobmezhenogo transversalno-izotropnogo tila // Mat. metodi ta fiz.-meh. polya. – 2018. – 61, №4 – 88-99 s. {in Ukrainian}

10. Shkelev L.T., Morskov Yu.A., Romanova T.A., Stankevych A.N /Metod priamыkh y eho yspolzovanye pry opredelenyy napriazhennoho y deformyrovannoho sostoianyi plastyn y obolochek (The Method of Lines and Its Use in Determining the Stressed and Deformed States of Plates and Shells). – K.: KNUSA, 2002. – 177 s. {in Russian}

11. Chubarev A.H. Pro zastosuvannia modyfikovanoho metoda priamykh v zadachakh termopruzhnosti netonkykh plastyn (On the application of the modified method of straight lines in problems of thermoelasticity of thin plates)// N. t. zbirnyk «Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia», v. 80, K.: KNUBA, 2022. - 486-498 s. {in Ukrainian}.

12. Yansons M.O. Zastosuvannia uzahalnenoho metodu priamykh dlia doslidzhennia dynamichnoho napruzheno-deformovanoho stanu kiltsevykh netonkykh plastyn (Application of the generalized method of straight lines to study the dynamic stress-strain state of annular thin plates)// N.t. zbirnyk «Matematychni problemy tekhnichnoi mekhaniky – 2021» Mizhnarodna naukova konferentsiia m. Dnipro, Kamianske 2021.{in Ukrainian}

13. O. Koshevyi, D. Levkivskyi, V. Kosheva, A. Mozharovskyi Computer modeling and optimization of energy efficiency potentials in civil engineering // Strength of Materials and Theory of Structures, 274-281 p. {in English}

14. A. Koshevoy Ustoychivost plastin i obolochek slozhnoy formyi v magnitnom pole. // Soprotivlenie materialov i teoriya sooruzheniy, vip. 59, 65-71, 1991. {in Russian}