DOI: 10.32347/2076-815X.2022.80.486-498
УДК 539.3
Чубарев А.Г.,
antoncubarev9@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6620-639X,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ МОДИФІКОВАНОГО МЕТОДА ПРЯМИХ В ЗАДАЧАХ ТЕРМОПРУЖНОСТІ НЕТОНКИХ ПЛАСТИН.

Наведено результати тестування методу скінченних елементів з використанням криволінійного просторового скінченного елемента на двох типах задач теорії пружності (рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, рівновага товстих плит з різними умовами закріплення) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Результати дослідження порівнюються з відомими аналітичними розв'язками, а також з розв'язками, отриманими іншими схемами методу скінченних елементів в ПК «ЛІРА-САПР» та ПК «SCAD Office».

Ключові слова: метод скінченних елементів; товсті пластини; товсті оболонки; криволінійний просторовий скінченний елемент; задача Ламе.

Напружено-деформований стан нетонких пластин при температурних впливах в наш час прийнято досліджувати з позиції теорії термопружності, враховуючи співрозмірність їхніх габаритних розмірів. У теорії термопружності відповідні задачі прийнято розв'язувати в два етапи. На першому етапі необхідно розв'язувати задачу теплопровідності з метою знаходження розподілу температур по об'єму пластини. На другому етапі по визначеному полю температур знайти характеристики напружено-деформованого стану.

Математичні моделі теплового та напружено-деформованого станів описуються диференціальними рівняннями в частинних похідних, які мають аналітичні розв'язки у виключних випадках. Для їх розв'язування застосовують чисельні методи.

Альтернативою побудови наближених розв'язків таких рівнянь є так звані чисельно-аналітичні методи, одним з яких є модифікований метод прямих [5]. Даний метод знижує вимірність вихідних розрахункових рівнянь по просторових змінних до редукованих рівнянь для яких побудовані ефективні високоточні чисельні методи.

У даній роботі розглянуто процедуру зниження вимірності стаціонарних рівнянь термопружності в постановці плоскої задачі теплопровідності, а для рівнянь теорії пружності – плоскої деформації.

Вихідні рівняння теплопровідності та теорії пружності приймаються у вигляді системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку:

рівняння теплопровідності –

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+Q_T=0 \text{ – рівняння теплового балансу} \qquad (1)$$

та рівняння закону Фур'є –

$$q_x=-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial x};q_y=-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial y} \qquad (2)$$

Тут T(x,y) – температурна функція, *qx, qy* – компоненти вектора теплового потоку.

Вихідні рівняння теорії пружності приймаємо у аналогічному вигляді

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-\frac{\partial\tau}{\partial y}+x=0, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial x}+\gamma=0, \text{ – рівняння рівноваги;}$$

$$\sigma_x=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda\frac{\partial v}{\partial y}-(3\lambda+2\mu)\alpha_T(T-T_0)$$

$$\sigma_y=\lambda\frac{\partial u}{\partial x}+(\lambda+2\mu)\frac{\partial v}{\partial y}-(3\lambda+2\mu)\alpha_T(T-T_0) \qquad (4)$$

$$\tau=\mu(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}).$$

Тут $\sigma_x(x,y),\sigma_y$ - компоненти тензора напружень; оскільки $\tau xy=\tau yx$, то вони позначені $\tau=\tau xy=\tau yx$. Рівняння (4) – це рівняння закона Гука, в яких компоненти тензора деформацій виключені за допомогою співвідношень Коші для деформацій.

Оскільки σ_x та σ_y є лінійними комбінаціями $\frac{\partial u}{\partial x}$ та $\frac{\partial v}{\partial y}$ то, одне з них можна виключити з системи розрахункових рівнянь, записавши σ_y через σ_x та y, а саме:

$$\sigma_y = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} - \sigma_x + \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}(3\lambda+2\mu)\alpha_T(T - T_0). \tag{5}$$

Функції, що входять до розрахункових рівнянь, повинні задовольняти граничні умови на границі області, що розглядається (Рис.1):

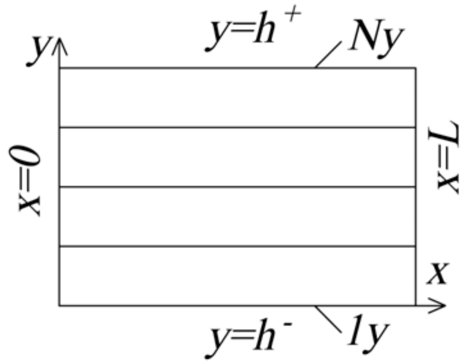


Рис.1

Для рівнянь теплопровідності граничні рівняння по площинам *x=0, x=l, y=h-, y=h+* приймаємо у формі рівнянь конвективного теплообміну:

$$q_x(0,y) = q_c^0(\mathrm{y}) - \alpha^o(T(0,y) - \theta^0(y)), \tag{6}$$

$$q_x(L,y) = q_c^L(\mathrm{y}) + \alpha^L(T(L,y) - \theta_c^L(y)), \tag{7}$$

$$q_y(x,h^-) = q_c^-(x) - \alpha^-(T(h^-,x) - \theta_c^-(x)), \tag{8}$$

$$q_y(x,h^+) = q_c^+(x) + \alpha^+(T(h^+,x) - \theta_c^+(y)). \tag{9}$$

Тут α - коефіцієнт тепловіддачі з відповідної поверхні, індексом «с» позначимо температуру θ та компоненту теплового потоку $\vec{q}$ оточуючого середовища з боку відповідної граничної площини.

Слід зазначити, що такий варіант граничних умов враховує при $\alpha \to 0$ - граничні умови другого роду, при $\alpha \to \infty$- граничні умови першого роду.

Аналогічно граничним умовам для рівняння теплопровідності розглядаємо граничні умови для рівнянь теорії пружності (тут коефіцієнтам тепловіддачі будуть відповідати жорсткості k пружних в’язів (Рис.2), що з’єднують кожну точку граничної поверхні з відповідною точкою оточуючого середовища.

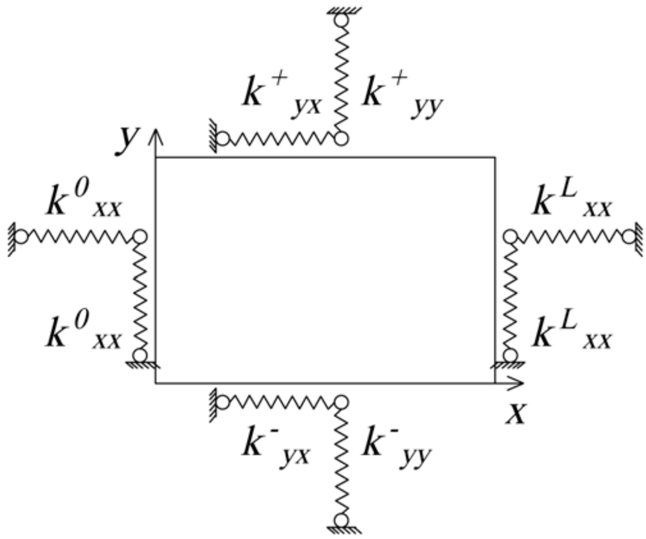


Рис.2

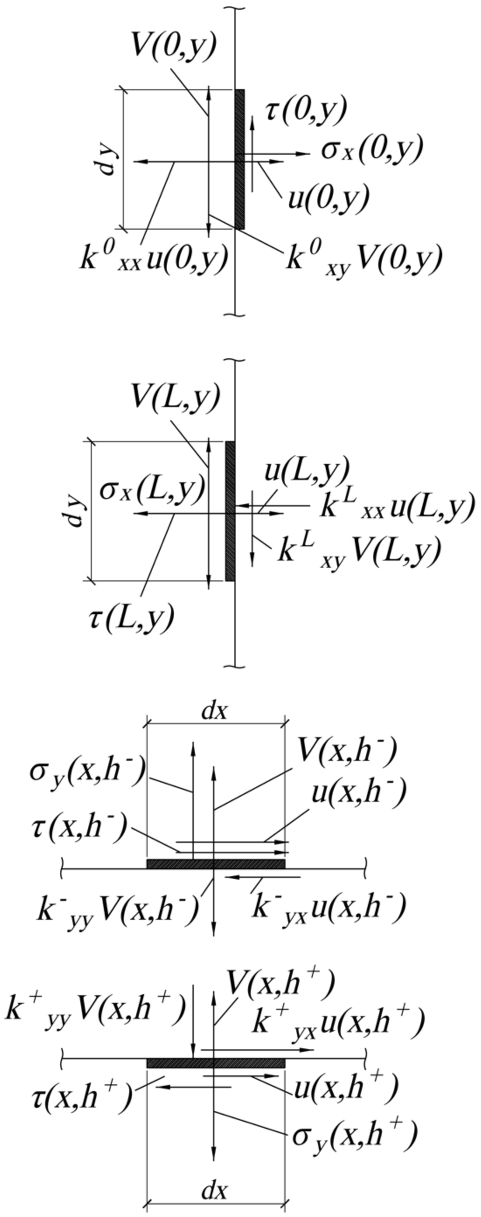
Граничні умови, що випливають з рівнянь рівноваги диференціальних елементів приграничної області мають вигляд (див. рис.3).

Одним з найбільш поширених та ефективних методів будівельної механіки для розв’язання складних задач є зниження вимірності розрахункових рівнянь. Спочатку зниження вимірності розрахункових рівнянь виконувалось із застосуванням певних гіпотез (теорія згину балки, теорія тонких пластин, теорія тонких оболонок), але потім для зниження вимірності почали розробляти математичні процедури. Одним з таких підходів став модифікований метод прямих [5].

В цьому методі на область, в якій визначено граничну задачу, наносяться паралельні прямі з певним кроком. З цими прямими пов’язується система лінійно незалежних функцій (передбачаються локально зосереджені функції, в даному випадку так звані функції «кришки» [7]).

Для множини функцій, що розглядається, визначається скалярний добуток, який в даному випадку є інтегралом від добутку двох функцій, а саме:

$$f(y), g(y) = \int_{h^-}^{h^+} f(y) \cdot g(y) dy. \tag{18}$$



$$-k_{xx}^{0}\cdot u(0,y)+\sigma_{x}(0,y)=0 \tag{10}$$

$$-k_{xy}^{0}\cdot V(0,y)+\tau(0,y)=0 \tag{11}$$

$$-k_{xx}^{L}\cdot u(L,y)-\sigma_{x}(L,y)=0 \tag{12}$$

$$-k_{xy}^{L}\cdot V(L,y)-\tau(L,y)=0 \tag{13}$$

$$-k_{yy}^{-}\cdot V(x,\mathrm{h}^{-})+\sigma_{y}(x,\mathrm{h}^{-})=0 \tag{14}$$

$$-k_{yx}^{-}\cdot u(x,\mathrm{h}^{-})+\tau(x,\mathrm{h}^{-})=0 \tag{15}$$

$$-k_{yx}^{+}\cdot u(x,\mathrm{h}^{+})-\tau(x,\mathrm{h}^{+})=0 \tag{16}$$

$$-k_{yy}^{+}\cdot V(x,\mathrm{h}^{+})-\sigma_{y}(x,\mathrm{h}^{+})=0 \tag{17}$$

Рис.3

Оскільки система базисних функцій не є ортогональною, то крім вибраного базиса (так званого «основного») обов’язково розглядається взаємний базис, як прийнято в тензорній алгебрі. Відповідно будь-яку функцію будемо мати у вигляді розкладу по основному базису або взаємному:

$$f(x,y)=f^{i}(x)\cdot\varphi_{i}(y)=f_{j}(x)\cdot\varphi^{j}(y),(\mathrm{i}\epsilon 1,\mathrm{N}_{y})$$

(19)

Компоненти функції відносно основного базиса $f^{i}(x)$ є коефіцієнтами $f^{i}(x)$у розкладі (19) по основному базису $\varphi^{i}(y)$. В той же час вони є «моментами» відносно взаємного базиса, тобто інтегралами:

$$f^{i}(\mathrm{x})=(f(\mathrm{x},y),\varphi^{i}(y)=\int_{h^{-}}^{h^{+}}f(\mathrm{x},y)\cdot\varphi^{i}(y)dy. \qquad (20)$$

При побудові редукованих рівнянь будемо застосовувати тензорні операції та правила виконання цих операцій. По індексах, які повторюються, в двочленних виразах, передбачається підсумовування в межах зміни індексу. Редуковані рівняння можуть бути побудовані «в коефіцієнтах» або «в моментах», тобто невідомими в редукованих рівняннях можуть бути коефіцієнти розрахункових функцій відносно основного базиса (одночасно вони є моментами відносно взаємного базиса), або моменти відносно основного базиса, в той же час вони є коефіцієнтами відносно взаємного базиса. Як показує порівняння, більш зручними є коефіцієнти відносно основного базиса, тому редуковані рівняння з такими розрахунковими функціями будемо називати рівняннями «в коефіцієнтах».

Щоб побудувати рівняння термопружності «в коефіцієнтах» необхідно кожне з вихідних рівнянь скалярно помножити на елементи взаємного базиса. Для вихідних рівнянь теплопровідності маємо:

$$\left(\left(q_{x}=-\lambda_{\text{т}}\frac{\partial T}{\partial x}\right),\ \varphi^{i}\left(y\right)\right)\ \rightarrow\ q_{x}^{i}=-\lambda_{\text{т}}\left(\frac{\partial T}{\partial x},\varphi^{i}\right)\ \rightarrow\ q_{x}^{i}=-\lambda_{\text{т}}\int_{h-}^{h+}\frac{\partial T}{\partial x}\varphi^{i}\left(y\right)dy$$

Оскільки інтегрування відбувається по змінній *y*, а функція *T(x,y),* вважається залежною від *x*, як від параметра, то

$$\int_{h-}^{h+}\frac{\partial T\left(x,y\right)}{\partial x}\varphi^{i}\left(y\right)dy=\frac{\partial}{\partial x}\int_{h-}^{h+}T\left(x,y\right)\ \varphi_{i}\left(y\right)dy=\frac{\partial}{\partial x}T^{i}\left(x\right)$$

Остаточно маємо:

$$q_{x}^{i}=-\lambda_{\text{т}}\frac{\partial T^{i}\left(x\right)}{\partial x} \qquad (21)$$

$$\left(\left(q_{y}=-\lambda_{\text{т}}\frac{\partial T^{i}}{\partial y}\right),\varphi^{i}\left(y\right)\right)\ \rightarrow\ q_{y}^{i}=-\lambda_{\text{т}}\left((\frac{\partial T}{\partial y},\varphi^{i}\left(y\right)\right);$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y},\ \varphi^i(y)\right)=\int_{h-}^{h+}\frac{\partial T}{\partial y}*g^{ij}\varphi_j(y)=g^{ij}\int_{h-}^{h+}\frac{\partial}{\partial y}\left(T^\alpha(x)\varphi_\alpha(y)\right).\ \varphi_j(y)dy=$$

$$=g^{ij}\left(\int_{h-}^{h+}\varphi_j(y)*\ \varphi_j^{'}(y)dy\right)T^\alpha(x)=g^{ij}b_{j\alpha}T^\alpha(x).$$

Остаточно маємо:

$$q_y^i=-\lambda_{\text{т}}g^{ij}b_{j\alpha}T^\alpha(x) \tag{22}$$

Тут використано тензорну операцію опускання індексу

$$\varphi^i(y)=g^{ij}\varphi_j(y),$$

Де g^{ij} – двічі контрваріантний метричний тензор

$g^{ij}=(\varphi^i,\varphi^j)$, матриця якого знаходиться як обернена до матриці двічі коваріантного метричного тензора

$$\left\{g^{ij}\right\}=\left\{g_{ij}\right\}^{-1};\ g_{ij}=\left(\varphi_i(y),\varphi_j(y)\right).$$

Тут и далі використовується співвідношення

$$b_{j\alpha}=\int_{h-}^{h+}\varphi_j(y)*\varphi_\alpha^{'}(y)dy.$$

Редукуємо рівняння (1):

$$\left(\left(-\frac{\partial q_x}{\partial x}-\frac{\partial q_y}{\partial y}+Q_T=0\right),\varphi^i(y)\right)\ \rightarrow\ -\frac{\partial q_x^i(x)}{\partial x}-\left(\frac{\partial q_y}{\partial y},\varphi^i(y)\right)+Q_T^i=0,$$

$$\left(\frac{\partial q_y}{\partial y},\varphi^i(y)\right)=\int_{h-}^{h+}\frac{\partial q_y}{\partial y}*\varphi^i(y)dy=\ g^{ij}\int_{h-}^{h+}\frac{\partial q_y}{\partial y}*\varphi_j(y)dy;$$

Оскільки функція $q_y(x,y)$ є тільки один раз диференційована по y, то рекомендується при обчисленні даного інтеграла застосовувати «пом’якшення» інтегрування [7] за допомогою інтегрування частинами:

$$g^{ij}\int_{h-}^{h+}\frac{\partial q_y}{\partial y}*\varphi_j(y)\,dy=\begin{vmatrix} u=\varphi_j(y) & du=\varphi_j(y)\,dy \\ dV=\dfrac{\partial q_y}{\partial y}dy & V=q_y \end{vmatrix}=$$

$$=g^{ij}\left(\left(\varphi_j(y)*q_y\right)\Big|_{h-}^{h+}-\int_{h-}^{h+}q_y\varphi_j^{'}(y)\,dy\right)=$$

$$g_y\left[\delta_j^{Ny}\cdot q_y^{Ny}-\delta_j^{1y}\cdot q_y^{1y}-\int_{h-}^{h+}(q_y^{\alpha}\cdot\varphi_{\alpha}(y)\cdot\varphi_j^{/}(y)dy\right]=g^{iNy}q_y^{Ny}-g^{i1y}q_y^{1y}-g^{ijb_{\alpha j}}q_y^{\alpha}$$

Тут використано тензорну операцію заміни індекса $g^{ij}\cdot\delta_i^{Ny}=g^{iNy}$ та $g^{ij}\cdot\delta_i^{1y}=g^{i1y}$. По індексах *1y* та *Ny*, які повторюються, не підсумовувати, оскільки *1y* та *Ny* – фіксовані числа; *1y* – номер першої прямої, *Ny* – номер останньої прямої по y. До цього виразу входять q_y^{Ny} та q_y^{1y} - значення компонент вектора теплового потоку на останній *Ny* та першій *1y* прямих по *y*. Враховуючи ці співвідношення та граничні умови (8), (9) отримаємо:

$$\begin{aligned}&g^{iNy}\cdot q_y^{Ny}-g^{i1y}\cdot q_y^{1y}=g^{iNy}\left[q_c^{+}(x)+\alpha_T^{+}(T(h^{+},x)-\theta_c^{+}(x)\right]-\\&-g^{i1y}\left[q_c^{-}(x)+\alpha_T^{-}(T(h^{-},x)-\theta_c^{-}(x)\right]=g^{iNy}\cdot\alpha_T^{+}\cdot T(h^{+},x)+g^{i1y}\cdot\alpha_T^{-}\cdot T(h^{-},x)+\\&+g^{iNy}\left[q_c^{+}(x)-\alpha_T^{+}\theta_c^{+}(x)\right]-g^{i1y}\left[q_c^{-}(x)-\alpha_T^{-}\theta_c^{-}(x)\right]\end{aligned}\tag{22}$$

$$-\frac{\partial q_x^i(x)}{\partial x}-\left(\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi^i(y)\right)+Q_T^i=0$$

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi^i(y)=-g^{ij}\int_{h-}^{h+}\cdot\varphi_j(y)dy$$

$$-g^{ij}\int_{h-}^{h+}\cdot\frac{\partial q_y}{\partial y}\varphi^i(y)\,\mathrm{dy}=-g^{ij}(\varphi_j(y)\cdot\mathrm{q}_y)\Big|_{h-}^{h+}+\int_{h-}^{h+}\cdot q_y\varphi^{/}{}_j(y)dy=$$

$$-(g^{iNy}\cdot q_y^{Ny}-g^{i1y}\cdot q_y^{1y}-g^{ij}b_{\alpha j}\cdot q_y^{\alpha})=-g^{iNy}\cdot q_y^{Ny}+g^{i1y}\cdot q_y^{1y}+$$

$$+g^{ij}b_{\alpha j}\cdot q_y^{\alpha}-g^{iNy}\cdot q_y^{Ny}+g^{i1y}\cdot q_y^{1y}=-g^{iNy}$$

$$(-\frac{\partial q_y}{\partial y},\varphi^i(y)) = -\int\limits_{h-}^{h+} \frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\varphi^i(y)dy = -g^{ij}\int\limits_{h-}^{h+} \frac{\partial q_y}{\partial y}\cdot\varphi^i(y)dy = \left| \begin{array}{l} \varphi_j = u, \mathrm{du} = \varphi_j^{/}(y)dy \\ \frac{\partial q_y}{\partial y}dy = dN, V = q_y \end{array} \right| =$$

$$= -g^{ij}\left[(q_y\cdot\varphi_j)|_{h-}^{h+} - \int\limits_{h-}^{h+} q_y\varphi_j^{/}(y)dy\right] = -g^{ij}\left[(q_y^{Ny}\delta_i^{Ny} - q_y^{1y}\delta_i^{1y}) - \int\limits_{h-}^{h+} q_y^{\alpha}\cdot\varphi_\alpha\cdot\varphi_j^{/}(y)dy\right] =$$

$$= -g^{iNy}q^{Ny} + g^{i1y}q^{1y} + g^{ij}b_{\alpha j}\cdot q_y^{\alpha} = -g^{iNy}\left[q_c^+(x) + \alpha_T^+(T(h^+,x) - \theta_c^+(x))\right] +$$

$$+ g^{i1y}\left[q_c^-(x) - \alpha_T^-(T(h^-,x) - \theta_c^-(x))\right] + g^{ij}b_{\alpha j}\cdot q_y^{\alpha} = -g^{iNy}\alpha_T^+T(h^+,x) - g^{i1y}\alpha_T^-T(h^-,x) -$$

$$- g^{iNy}\left[q_c^+(x) - \alpha_T^+\theta_c^+(x)\right] + g^{i1y}\left[q_c^-(x) + \alpha_T^-\theta_c^-(x)\right]$$

Остаточно маємо:

$$\begin{aligned} &-\frac{\partial q_y^i(x)}{\partial x} - g^{iNy}\alpha_T^+T(h^+,x) - g^{i1y}\alpha_T^-T(h^-,x) + g^{ij}b_{\alpha j}\cdot q_y^{\alpha} + Q_T^{-i}(x) = 0 \\ &Q_T^{-i}(x) = Q_T^i(x) - g^{iNy}\left[q_c^+(x) - \alpha_T^+\theta_c^+(x)\right] + g^{i1y}\left[q_c^-(x) - \alpha_T^-\theta_c^-(x)\right] \end{aligned} \qquad (23)$$

Оскільки невідома функція q_y^{α} входить до системи редукованих рівнянь алгебраїчно, то її слід вилучити, зменшивши кількість рівнянь. Для цього в рівнянні (22) змінимо необхідним чином індекси:

$$q_y^{\alpha} = -\lambda_T g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}T^{\gamma}(x)$$

та підставимо в рівняння (23):

$$-\frac{\partial q_y^i(x)}{\partial x} - g^{iNy}\alpha_T^+T(h^+,x) - g^{i1y}\alpha_T^-T(h^-,x) - \lambda_T g^{ij}b_{\alpha j}g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}T^{\gamma}(x) + Q_T^{-i}(x) = 0$$

Таким чином система редукованих рівнянь теплопровідності складається з двох рівнянь в індексній формі, записаних у формі Коші, що є необхідним для застосування сучасних чисельних методів:

$$\begin{aligned} &\frac{dT_{(x)}^i}{dx} = -\frac{1}{\lambda_T}q_x^i(x), \\ &\frac{dq_y^i(x)}{dx} = -g^{iNy}\alpha_T^+T(h^+,x) - g^{i1y}\alpha_T^-T(h^-,x) - \lambda_T g^{ij}b_{\alpha j}g^{\alpha\beta}b_{\beta\gamma}T^{\gamma}(x) + Q_T^{-i}(x) = 0 \end{aligned} \qquad (24)$$

Невідомі одновимірні функції $T^{\iota}(x)$ та $q_x^{\iota}(x)$ визначені на відрізку [0,L] повинні задовольняти граничним умовам на кінцях цього відрізка. Ці умови знаходимо застосовуючи проекційний метод Гальоркіна-Петрова [7] з прийнятими в даній роботі базисними функціями до зниження вимірності вихідних граничних умов (6), (7). Оскільки завдяки прийнятій в даній роботі формі вихідних рівнянь граничні умови є алгебраїчними співвідношеннями, то і редуковані граничні умови мають той самий вигляд, а саме:

$$\begin{aligned} q_x^i(0) &= q_c^{0,i} - \alpha_T^0 (T^i(0) - \theta_c^{0,i}), \\ q_x^i(L) &= q_c^{L,i} - \alpha_T^L (T^i(L) - \theta_c^{L,i}). \end{aligned} \qquad (25), (26)$$

Аналогічно будуються редуковані рівняння теорії пружності. При цьому відповідні редуковані рівняння записуються відносно першої похідної від переміщень *u(x,y)* та *v(x,y)*:

$$\begin{aligned} \frac{du^i(x)}{dx} &= \frac{1}{\lambda + 2\mu}\sigma_x^i - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} v^{\alpha}(x) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T^i(x) T_0^i(x)) \\ \frac{dv^i}{dx} &= \frac{\tau^i}{\mu} - \frac{\partial u^i}{\partial y}, \end{aligned} \qquad (27), (28)$$

ці рівняння аналогічні редукованим рівнянням закону Фур'є.

В редукованих статичних рівняннях враховано граничні умови на бокових поверхнях $y = h^-$ та $y = h^+$. Ліва частина цих редукованих рівнянь становить $\dfrac{d\sigma_x^i(x)}{dx}$ в третьому рівнянні та $\dfrac{d\tau^i(x)}{dx}$ в четвертому. Крім цього, до вихідного четвертого рівняння входить невідома σ_y, яку необхідно виключити з редукованих рівнянь за допомогою редукованого співвідношення (5):

$$\sigma_y^i(x) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} + \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} g^{ij} b_{j\alpha} u^{\alpha}(\mathrm{x}) - \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu}(3\lambda + 2\mu)\alpha_T (T^i(x) - T_0^i(\mathrm{x})).$$

Остаточно третє та четверте редуковані рівняння теорії пружності мають вигляд:

$$\frac{d\sigma_x^i(x)}{dx} = g^{iNy} k_{yx}^{+} u^{Ny}(x) + g^{i1y} k_{yx}^{-} u^{1y}(x) + \mathrm{g}^{ij}\, b_{\alpha j} \tau^{\alpha} - \overline{x}^{i},$$
$$\frac{d\tau_x^i(x)}{dx} = g^{iNy} k_{yy}^{+} v^{Ny}(x) + g^{i1y} k_{yy}^{-} v^{1y}(x) + \frac{4\mu(\lambda-\mu)}{\lambda+2\mu} \mathrm{g}^{ij}\, b_{\alpha j}\, \mathrm{g}^{\alpha\beta}\, b_{\beta\gamma}\, \mathrm{V}^{\gamma}, \qquad (29), (30)$$

Тут передбачається, що розглядаються тільки температурні впливи.

Невідомі редукованих статичних рівнянь (28)-(31) повинні задовольняти граничним умовам, які отримуємо з вихідних граничних умов (10)-(13), редукуючи їх:

$$-k_{xx}^{0} \cdot u^{i}(0) + \sigma_x^i(0) = 0$$
$$-k_{xy}^{0} \cdot v^{i}(0) + \tau^{i}(0) = 0$$
$$+k_{xx}^{L} \cdot v^{i}(L) + \sigma_x^i(L) = 0$$
$$+k_{xy}^{L} \cdot v^{i}(L) + \tau^{i}(L) = 0$$

Література

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – Издательство «Высшая школа», Москва, 1967 - 270 с.

2. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Издательство «Наукова думка», Киев, 1970. – 165 с.

3. Тимошенко С.П., Дж. Гудьер, Теория упругости – Москва «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1979. – 242 с.

4. Г. Краслоу, Д. Егер, Теплопроводность твердых тел – Издательство «Наука», Москва, 1984. - 455 с.

5. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Сович Ю.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О. Модифікований метод прямих, алгоритм його застосування, можливості та перспективи // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 70. – К.: КНУБА, 2019. – С. 595-616.

6. Б. Боли, Дж. Уэйнер, Теория температурных напряжений – Издательство «Мир», Москва, 1964 – 418 с.

7. Марчук Г.И. Агошков В.И., Введение в проекционно-сеточные методы – Издательство «Наука», 1981. – 255 с.

8. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Кошевий О.П., Левківський Д.В., Краснеєва А.О., Пошивач Д.В., Сович Ю.В., Чубарев А.Г., Шорін О.А., Янсонс М.О. Чисельна реалізація модифікованого методу прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 74. – К.: КНУБА, 2020. – С. 341-359.

9. Чибіряков В.К., Кошевий О.П., Чубарев А.Г. Про один алгоритм для розв'язування задач термопружності на основі узагальненого метода прямих // BUILD-MASTER-CLASS-2018: Proceedings of international scientific-practical conference of young scientists. «Видавництво Ліра-К». – Вип. 74. – К.: КНУБА, 2018. – С. 90-191.

10. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В. Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 46. – К.: КНУБА, 2013. – С. 613-624.

11. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник, вип. 36 – К.: КНУБА, 2010. – С. 413-423.

Chubarev Anton Glibovich,
Kyiv national university of construction and architecture

ON THE USE OF THE MODIFIED METHOD OF LINES IN NONTHIN PLATE THERMOELASTICITY PROBLEMS.

This article considers the first stage of the algorithm of the modified method of lines for the boundary problem of thermoelasticity in a flat setting. The numerical-analytical method is based on the dimensionality reduction of the initial equations of thermoelasticity along one or two spatial coordinates (in this work, one at a time). For dimensionality reduction of the initial equations and boundary conditions, the projection method with the use of locally lumped functions associated with the selected system of straight lines as basic ones is used. Considering the nonorthogonality of the selected basic functions for constructing the reduced equations, tensor notation and the corresponding rules for tensor operations are used. This approach greatly simplifies the construction of design equations, and in the future, the use of modern numerical methods to solve them. The results of the study are compared with the known analytical solutions, as well as with the solutions obtained by other schemes of the finite element method in the PC "LIRA-CAD" and the PC "SCAD Office".

The article is devoted to the modified method of lines in space problems of thermoelasticity. Recently, the theory of thermoelasticity has undergone significant development due to the important problems that arise in the design of various structures, including building. The elements of these structures operate in conditions of uneven non-stationary heating, which changes the physical and mechanical properties of materials and there are temperature gradients, which are accompanied by unequal thermal expansion of parts of the elements. In turn, the engineer faces the task of calculating such structures. In this article, the focus is on spatial structures.

Keywords: numerical-analytical method, projection method, main basis, reciprocal basis, Einstein's equation, dimensionality reduction, thermal field, stress-strain state.

REFERENCES

1. Lyikov A.V. Teoryia teploprovodnosty. – Yzdatelstvo «Vыsshaia shkola», Moskva, 1967. - 270 s. {in Russian}.

2. Kovalenko A.D. Osnovы termoupruhosty. – Yzdatelstvo «Naukova dumka», Kyev, 1970. – 165 s. {in Russian}.

3. Tymoshenko S.P., Dzh. Huder, Teoryia upruhosty – Moskva «Nauka», Hlavnaia redaktsyia fyzyko-matematycheskoi lyteraturы, 1979. – 242 s.

4. H. Kraslou, D. Eher, Teploprovodnost tverdыkh tel – Yzdatelstvo «Nauka», Moskva, 1984. - 455 s. {in Russian}.

5. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Sovych Yu.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O. Modyfikovanyi metod priamykh, alhorytm yoho zastosuvannia, mozhlyvosti ta perspektyvy // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 70. –K.: KNUBA, 2019. – S. 595-616. {in Ukranian}.

6. B. Boly, Dzh. Uэiner, Teoryia temperaturnыkh napriazhenyi – Yzdatelstvo «Myr», Moskva, 1964. – 418 s. {in Russian}.

7. Marchuk H.Y. Ahoshkov V.Y., Vvedenye v proektsyonno-setochnыe metodы – Yzdatelstvo «Nauka», 1981. – 255 s. {in Russian}.

8. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Koshevyi O.P., Levkivskyi D.V., Krasneieva A.O., Poshyvach D.V., Sovych Yu.V., Chubarev A.H., Shorin O.A., Yansons M.O. Chyselna realizatsiia modyfikovanoho metodu priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 74 –K.: KNUBA, 2020. – S. 341-359. {in Ukranian}.

9. Chybiriakov V.K., Koshevyi O.P., Chubarev A.H. Pro odyn alhorytm dlia rozviazuvannia zadach termopruzhnosti na osnovi uzahalnenoho metoda priamykh // BUILD-MASTER-CLASS-2018: Proceedings of international scientific-practical conference of young scientists. «Vydavnytstvo Lira-K». – Vyp. 74 –K.: KNUBA, 2018. – S. 90-191. {in Ukranian}.

10. Chybiriakov V.K., Stankevych A.M., Levkivskyi D.V. Osoblyvosti znyzhennia vymirnosti rivnian teorii pruzhnosti uzahalnenym metodom priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 46 –K.: KNUBA, 2013. – S. 613-624. {in Ukranian}.

11. Stankevych A.M., Chybiriakov V.K., Shkelov L.T., Levkivskyi D.V. Do znyzhennia vymirnosti hranychnykh zadach teorii pruzhnosti za metodom priamykh // Mistobuduvannia ta terytorialne planuvannia: Nauk.-tekhn. Zbirnyk. – Vyp. 36 – K.: KNUBA, 2010. – S. 413-423. {in Ukranian}.