УДК 539.3

д.т.н., професор Чибіряков В.К.,
chybiriakov.vk2@knuba.edu.ua, ORCID:0000-0002-8839-7262,
к.т.н., доцент, Станкевич А.М.,
к.т.н., доцент Кошевий О.П.,
380939339872@yandex.ua, ORCID:0000-0002-7796-0443,
к.т.н., доцент, Левківський Д.В.,
dmitriylev@gmail.com, ORCID:0000-0003-2964-1605,
Краснеєва А.О., krasnieieva.ao@ knuba.edu.ua, ORCID:0000-0002-8058-1823,
Пошивач Д.В., dposhyvach@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8273-0298,
Чубарев А.Г., antoncubarev9@gmail.com, ORCID: 0000-0002-6620-639X,
Шорін О.А., shoringm@gmail.com, ORCID: 0000-0002-3250-2537,
Янсонс М.О., ya_mari@bigmir.net, ORCID: 0000-0002-6174-0403,
Сович Ю.В., yuliiasov@bigmir.net, ORCID:0000-0002-5114-6363.
Київський національний університет будівництва і архітектури

DOI: 10.32347/2076-815x.2019.70.595-616

МОДИФІКОВАНИЙ МЕТОД ПРЯМИХ, АЛГОРИТМ ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ, МОЖЛИВОСТІ ТА ПЕРСПЕКТИВИ.

Приведено основні ідеї та можливості модифікованого методу прямих, для розв'язання задач теорії пружності та термопружності. Описана процедура зниження вимірності за допомогою проекційного методу Бубнова-Петрова. Запропоновано універсальний підхід для врахування граничних умов, узагальнено підхід на області складної геометричної форми. Приведені основні метричні тензори, визначена метрика евклідового простору. Доведено можливості та перспективи запропонованого методу.

Даний метод включає в себе два послідовні етапи. На першому етапі, за допомогою проекційного методу, виконується зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь, початкових та граничних умов. Для цього використовується система локально-базисних функцій. На другому етапі редуковані диференціальні рівняння записуються у вигляді звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші, які залежать від однієї просторової координати.

Редукована система рівнянь та граничних умов розв'язується чисельним методом Гіра. Стаття є оглядовою та включає в себе основні особливості, що виникають при застосуванні модифікованого методу прямих для різних задач теорії пружності, динаміки та термопружності.

Ключові слова: модифікований метод прямих, теорія пружності, термопружність, базисні функції, проекційний метод, граничні умови, метод Гіра.

Побудова та використання комбінованих методів для розв’язання практичних задач – один з найпоширеніших та ефективних наукових підходів будівельної механіки. Основою таких підходів є зниження вимірності вихідної задачі по одній чи двох просторових змінних, що спрощує отримання необхідних результатів. Саме на цьому шляху будувались відомі теорії (розрахункові моделі) – теорія згину балки, теорія згину пластини, теорія оболонок та інші. Для зниження вимірності використовувались певні припущення та гіпотези. На другому етапі комбінованих методів спочатку застосовувались аналітичні методи.

Із розвитком ЕВМ, використання чисельних методів на другому етапі комбінованих методів для розв’язування редукованих задач стало невід’ємною частиною цих методів.

У той же час для зниження вимірності вихідних рівнянь все частіше стали використовувати аналітичні методи, наприклад теорія оболонок І. Н. Векуа [1], причому в роботі [2] було доведено ефективність застосування сучасних чисельних методів на другому етапі метода Векуа. При цьому підкреслено, що адаптація сучасних чисельних методів на другому етапі є необхідною, але не завжди тривіальною.

Одним з найстаріших комбінованих методів є “метод прямих”, запропонований в 1933 році Л.В. Канторовичем [3]. Він набув розповсюдження в середині XX століття в роботах Вінокурова Л.П. [4, 5], Шкельова Л.Т. [6-8], Григоренка Я.М. [9], Григоренка О.Я., Влайкова Г.Г. [10, 11] та їх учнів.

З точки зору тенденцій розвитку сучасних комбінованих методів, класичний варіант методу прямих суттєво відрізняється від вказаних вище напрямків. По-перше, в класичному варіанті методу прямих для зниження вимірності вихідних рівнянь застосовуються чисельний метод – а саме метод скінченних різниць. На другому етапі застосовуються аналітичні методи для розв’язання редукованих рівнянь, що суттєво обмежує можливості застосування цього методу. Така послідовність значно звужує клас задач, які можуть бути розв’язані цим методом. Ці ускладнення призвели до того, що в іноземній практиці назва “метод прямих” відома, але метод не використовувався.

У зв’язку з прийнятою незвичною послідовністю етапів класичного методу прямих виникають значні проблеми при формуванні граничних умов для редукованих рівнянь, особливо якщо вихідні граничні умови є природними.

Для нестаціонарних задач теплопровідності та динаміки, класичний метод прямих взагалі не застосовувався. А головним недоліком класичного метода прямих, як показує практика, є складність застосування для розв’язання редукованих рівнянь сучасних чисельних методів, оскільки ці рівняння мають нестандартний вигляд.

Авторами даної роботи запропоновано і продовжує розроблятися модифікований варіант метода прямих [12-16], структура якого відповідає сучасним вимогам до комбінованих методів. На першому етапі методу виконується зниження вимірності вихідних рівнянь на основі проекційного метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова. У якості базисних функцій використовуються локально зосереджені функції, пов'язані з вибором прямих. У роботі [13] пропонується три варіанти таких функцій. У найпростішому випадку – це "функції-кришки" [17].

Як і в класичному варіанті метода прямих, на область, у якій визначено вихідні рівняння математичної фізики, наносяться N прямих з певним кроком. На прямих обираються базисні функції. У найпростішому випадку область є прямокутною (рис.1):

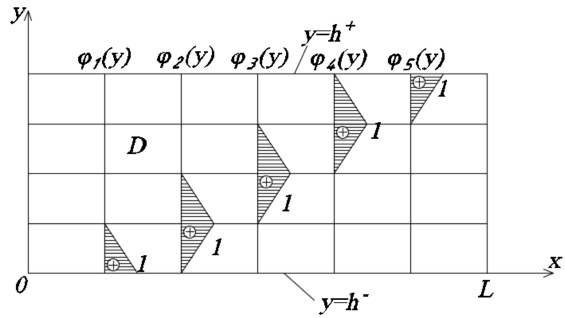

Рис.1. Базисні функції

Прямі будемо позначати $y = y_i \ \ (i = \overline{1, N})$. Вони послідовно нумеруються від 1 до N (або N_y). Згідно основної ідеї класичного методу прямих: в двовимірній області, вздовж прямих відповідна просторова змінна (в даному випадку x) змінюється неперервно, а змінна y змінюється дискретно. Система базисних функцій $\{\varphi_i(y)\}$ $(i = \overline{1, N})$ інтерполює значення координати y на проміжок між двома сусідніми прямими. Індекс i співпадає з номером прямої, вздовж якої значення базисної функції дорівнює одиниці, вздовж будь-якої іншої прямої значення базисної функції φ_i дорівнює нулю, тобто

$$\varphi_i(y_j) = \begin{cases} 1, \textit{ якщо } i = j \\ 0, \textit{ якщо } i \neq j \end{cases}$$

Згадані вище базисні функції не задовольняють граничним умовам. Але, як відомо з літератури [17], застосування базисних функцій в методі Бубнова-Гальоркіна-Петрова [17] потребує, щоб граничні умови були природними.

Відомо, що локально зосереджені функції не можуть утворювати ортонормованих базисів і з точки зору функціонального аналізу є косокутніми системами. Щоб визначити оптимальну послідовність редукування вихідних рівнянь, необхідно дослідити це питання з точки зору функціонального аналізу.

Основна ідея проекційного методу полягає в тому, що вихідна гранична задача, яка розглядається в нескінченновимірному лінійному просторі замінюється на задачу визначену на елементах скінченновимірного лінійного простору, тобто задача "проектується" на скінченновимірний простір [17].

Для визначення згаданого скінченновимірного лінійного простору вибирається його базис, а потім елементи скінченновимірного лінійного простору представляються лінійними комбінаціями базисних функцій:

$$f(x,y) = \sum_{i=1}^{N} a_i(x) \cdot \varphi_i(y) \qquad (1)$$

На елементах скінченновимірного лінійного простору визначається важлива математична дія – скалярний добуток двох елементів, яка спочатку визначається для базисних функціях:

$$(\varphi_i(y), \varphi_j(y)) = \int_{h^-}^{h^+} \varphi_i(y) \cdot \varphi_j(y) dy\,, \qquad (2)$$

потім переноситься на елементи лінійного простору, який називають евклідовим простором.

В евклідовому просторі з'являються геометричні поняття, які характерні для векторів. Згадані вище базиси косокутні. Щоб ефективно користуватись косокутними базисами в геометричному тривимірному просторі існує тензорне числення. Головні ідеї тензорного числення можна поширити на елементи N - вимірного евклідового простору [18].

Первинним і вихідним поняттям тензорної алгебри є поняття основного або коваріантного базису. Це будь-який базис, тобто лінійно незалежна система з N функцій, пов'язаних з вибраною системою прямих. Елементи основного базису прийнято позначати нижніми індексами ("коваріантними"): $\{\varphi_1(y), \varphi_2(y), \varphi_3(y), ..., \varphi_N(y)\}$, або $\{\varphi_i\}, (i = \overline{1,N})$. Невід'ємним поняттям даного еквівалентного простору є взаємний до основного або контрваріантний базис, елементи якого позначаються індексами вгорі ("контрваріантними") і визначаються співвідношеннями

$$\left(\varphi_i(y), \varphi^j(y)\right) = \delta_{i\cdot}^{\cdot j} = \begin{cases} 1, \textit{якщо } i = j \\ 0, \textit{якщо } i \neq j \end{cases} \qquad (3)$$

Якщо базис є ортонормованим, то взаємний базис співпадає з основним. В усіх інших випадках основний і взаємний – це різні базиси, тільки потрібно пам’ятати, що взаємним до взаємного базису є основний, тобто поняття взаємності базисів – двозначне. Тому для однозначності викладок необхідно прийняти певний базис за основний. У нашому випадку за основний приймається система найпростіших базисних функцій, які мають ненульові значення в полосі навколо однієї прямої – “функції-кришки” (рис.1). Слід зазначити, що функції взаємні до згаданих базисів мають ненульові значення на всій області D.

Пропонується наступна послідовність побудови необхідних співвідношень з використанням тензорних операцій та тензорної символіки:

1. Приймається система функцій за основний (коваріантний базис). У даній роботі – “функції-кришки” пов’язані з вибраними прямими.

2. Знаходяться компоненти двічі коваріантного метричного тензора в евклідовому просторі з вибраним основним базисом:

$$g_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y)) \tag{4}$$

Відповідні інтеграли обчислюються за правилом Верещагіна і в результаті отримуємо трьох діагональну матрицю компонент даного тензора:

$$\{g_{ij}\} = \Delta \cdot A_0, \text{ де } A_0 = \begin{vmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1/6 & 1/3 \end{vmatrix}, \tag{5}$$

тут Δ - стала відстань між прямими

3. Обчислюється матриця компонент двічі контраваріантного метричного тензора, яка є оберненою до матриці компонент двічі коваріантного метричного тензора:

$$(\varphi^i(y), \varphi^j(y)) = \{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A_0^{-1} \tag{6}$$

Беруться до уваги ще два варіанти компонент метричного тензора другого рангу, які називаються символами Кронекера:

$$\begin{gathered}(\varphi^i(y), \varphi_j(y)) = g^{i\cdot}_{\cdot j} = \delta^{i\cdot}_{\cdot j}\ ; \\ (\varphi_i(y), \varphi^j(y)) = g_{i\cdot}^{\cdot j} = \delta_{i\cdot}^{\cdot j}\end{gathered} \tag{7}$$

Маючи співвідношення (6) - (7) більшість необхідних величин можна отримати не будуючи в явному вигляді взаємний базис, оскільки розклад його елементів по основному базису легко отримується:

$$\varphi^i(y) = g^{ij} \cdot \varphi_j(y) \tag{8}$$

Має місце також обернене співвідношення:

$$\varphi_i(y) = g_{ij} \cdot \varphi^j(y) \quad (9)$$

Тут і далі в двочленних виразах по індексу, що повторюється, передбачається підсумовування в межах зміни значень цього індексу (узгодження Ейнштейна). Співвідношення (8), (9) важливі тензорні операції – підняття та опускання індексу відповідно.

Кожній функції змінної y, яку вважаємо залежною від y та параметрично від інших змінних, наприклад – просторової x та часової t в евклідовому просторі ставиться у відповідність компонента відносно вибраного базису, яка позначається тією ж літерою, що й задана функція, але з певним індексом.

а) Коваріантна компонента $f(x,y,t) \to f_i(x,t)$, яка є коефіцієнтом у розкладі вихідної функції по взаємному базису

$$f(x,y,t) = f_i(x,t) \cdot \varphi^i(y) \quad (10)$$

або моментом (інтегралом) відносно основного базису

$$f_i(x,t) = (f(x,y,t), \varphi_i(y)) = \int_{h^-}^{h^+} f(x,y,t) \cdot \varphi_i(y) dy \quad (11)$$

б) Контраваріантна компонента $f(x,y,t) \to f^i(x,t)$, яка є коефіцієнтом у розкладі вихідної функції по основному базису

$$f(x,y,t) = f^i(x,t) \cdot \varphi_i(y) \quad (12)$$

або моментом (інтегралом) відносно взаємного базису

$$\left(f(x,y,t), \varphi^i(y)\right) = \int_{h^-}^{h^+} f(x,y,t) \cdot \varphi^i(y) dy \quad (13)$$

Перехід від компонент одного типу до іншого виконується за допомогою тензорних операцій піднімання та опускання індексів:

$$f^i(x,t) = g^{ij} \cdot f_j(x,t); \quad (14)$$

$$f_i(x,t) = g_{ij} \cdot f^j(x,t) \quad (15)$$

Важливою є також операція заміни індексу:

$$\delta_{i\cdot}^{\cdot j} \cdot f_j = f_i \text{ або } \delta_{\cdot j}^{i\cdot} \cdot f_i = f_j \quad (16)$$

У задачах математичної фізики невідомі величини, що описують фізичні процеси, поділяють на інтенсивні та екстенсивні невідомі. Інтенсивні невідомі в теорії теплопровідності – це температурна функція, в теорії пружності – компоненти вектора переміщень. Екстенсивні невідомі в теорії теплопровідності – це компоненти вектора теплового потоку, в теорії пружності – компоненти тензора напружень. Як правило, інтенсивні невідомі мають бути двічі диференційованими, натомість екстенсивні – тільки один раз.

У комбінованих моделях будівельної механіки інтенсивні невідомі в теорії згину пластин є коефіцієнтами в розкладі по степеням вертикальної координати $\{1, y\}$, вертикальне переміщення $w(x, y, z) = w_0(x, y) \cdot 1$, w_0 - коефіцієнт в цьому розкладі. Екстенсивні невідомі є моментами (наприклад, при записі напруження σ_x, невідомим є інтеграл по координаті z – згинальний момент). В інших комбінованих моделях будівельної механіки спостерігається аналогічна ситуація, в теорії оболонок переміщення в коефіцієнтах, екстенсивні невідомі – в моментах - Q_y, S_x, та інші. Приведені функції є моментами різних порядків від компонент тензора напружень відносно базисних функцій $\{1, y\}$.

Ще більш загальна ситуація в нашому випадку. Тут поняття коефіцієнтів та моментів подвійне. Величина, що є коефіцієнтом відносно основного базису в той же час є моментом відносно взаємного і навпаки, Щоб уникнути непорозумінь, то коефіцієнтами будемо називати ті величини, які є коефіцієнтами відносно основного базису, а моментами – моменти відносно основного базису.

За аналогією до традицій будівельної механіки, редуковані рівняння можна побудувати у чотирьох варіантах [16]:

1. інтенсивні невідомі – в коефіцієнтах, екстенсивні – в моментах (як в будівельній механіці);
2. інтенсивні невідомі – в моментах, екстенсивні – в коефіцієнтах;
3. інтенсивні і екстенсивні невідомі – в моментах
4. інтенсивні та екстенсивні невідомі – в коефіцієнтах

Як показав досвід, перший та другий варіанти призводять до редукованих умов складного вигляду і тому не раціональні. У четвертому варіанті усі невідомі величини в коефіцієнтах. У зв’язку з вибором основного базису [16] ці коефіцієнти мають простий фізичний зміст – це значення невідомих функцій на відповідних прямих. Тому даний варіант редукованих рівнянь зручно застосовувати для подальших розрахунків.

Важливим питанням при застосуванні модифікованого метода прямих є форма запису вихідних розрахункових рівнянь, граничних та початкових умов. Від цього залежить ефективність побудови редукованих рівнянь та відповідних граничних та початкових умов. Необхідно щоб в подальшому редуковані задачі можна було розв’язати сучасними чисельними методами.

Що стосується форми вихідних рівнянь, то досвід застосування модифікованого методу прямих свідчить про те, що найзручніше для зниження вимірності підходить проекційний метод, якщо вихідні рівняння мають вигляд системи диференціальних рівнянь в частинних похідних першого порядку по просторових координатах. У цьому випадку граничні умови мають вигляд алгебраїчних рівнянь, а редуковані розв’язувальні рівняння зводяться до форми Коші.

Щоб записати вихідні рівняння в бажаному вигляді, в якості невідомих мають бути записані усі інтенсивні та екстенсивні величини. У теплопровідності це T, q_x, q_y, q_z, у теорії пружності - $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$.

У задачах теорії пружності, компоненти тензора деформацій виключаються з вихідних рівнянь за допомогою алгебраїчних співвідношень закону Гука.

Як вихідні граничні умови розглядаються природні граничні умови загального типу, які отримуємо з умов рівноваги пригграничної зони тіла. Для рівнянь теплопровідності це умови конвективного теплообміну загального вигляду.

Наприклад, у випадку розрахункової функції $T(x, y, z)$, визначеної на області D (рис.1), при вибраній системі прямих граничні умови по змінній x:

$$q_x(0, y, t) - q_{x,c}^0(y, t) = \alpha_T^0(T_c^0(0, y, t) - \theta_c^0(y, t)), \tag{17}$$

$$q_x(l, y, t) - q_{x,c}^l(y, t) = \alpha_T^l(T_c^l(l, y, t) - \theta_c^l(y, t)). \tag{18}$$

Тут $q_{x,c}^0(y, t)$, $\theta_c^0(y, t)$, $q_{x,c}^l(y, t)$, $\theta_c^l(y, t)$ - компоненти вектора теплового потоку та температура зовнішнього середовища з боку границь $x = 0$ та $x = l$ тіла. α_T^0 та α_T^l - коефіцієнти тепловіддачі на цих границях. Для зручності застосування цих граничних умов, поділимо ліву та праву частини співвідношень (17) та (18) відповідно на коефіцієнти:

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_T^0)^2}}\left(q_x(0, y, t) - q_{x,c}^0(y, t)\right) = \frac{\alpha_T^0}{\sqrt{1 + \left(\alpha_T^0\right)^2}}\left(T(0, y, t) - \theta_c^0(y, t)\right), \tag{19}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_T^l)^2}}\left(q_x(l, y, t) - q_{x,c}^l(y, t)\right) = \frac{\alpha_T^l}{\sqrt{1 + \left(\alpha_T^l\right)^2}}\left(T(l, y, t) - \theta_c^l(y, t)\right) \tag{20}$$

У такому вигляді граничні умови дозволяють враховувати граничні умови першого та другого роду. При $\alpha_T \to 0$, $\frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_T)^2}} \to 1$, $\frac{\alpha_T}{\sqrt{1 + (\alpha_T)^2}} \to 0$, маємо $q_x(0, y, t) = q_x^0(y, t)$, $q_x(l, y, t) = q_x^l(y, t)$ - граничні умови другого роду;

при $\alpha_T \to \infty$ (практично приймається досить великим) $\frac{\alpha_T}{\sqrt{1 + (\alpha_T)^2}} \to 1$, $\frac{1}{\sqrt{1 + (\alpha_T)^2}} \to 0$, маємо $T(0, y, t)$ - граничні умови першого роду.

Граничні умови по дискретній координаті y запишемо у вигляді:

$$q_y(x,h^-,t) - q_{y,c}^-(y,t) = \alpha_T^-(T(x,h^-,t) - \theta_c^-(x,y)),$$

$$q_y(x,h^+,t) - q_{y,c}^+(y,t) = \alpha_T^+(T(x,h^+,t) - \theta_c^+(x,y)),$$

де $\theta_c^-(x,y)$, $\theta_c^+(x,y)$, $q_y(x,h^-,t)$, $q_y(x,h^+,t)$ - температура зовнішнього середовища з боку поверхні $y=h^-$ та $y=h^+$ відповідно.

$T(x,h^-,t)$ - значення температурної функції на прямій з номером 1, $T(x,h^+,t)$ - на прямій з номером N. Введемо позначення $T(x,h^-,t)=T^1(x,t)$, $T(x,h^+,t)=T^N(x,t)$ - дані елементи є контраваріантними компонентами (коефіцієнтами у розкладі по основному базису). Аналогічно $q_y(x,h^-,t)=q_y^1(x,t)$, $q_y(x,h^+,t)=q_y^N(x,t)$.

Відповідні граничні умови будемо використовувати у вигляді:

$$q_y^1(x,t) = \alpha_T^- T^1(x,t) + q_{y,c}^-(y,t) - \alpha_T^- \theta_c^-(x,t), \tag{21}$$

$$q_y^N(x,t) = \alpha_T^- T^N(x,t) + q_{y,c}^+(y,t) - \alpha_T^- \theta_c^+(x,t) \tag{22}$$

У випадку вихідних розрахункових рівнянь теорії пружності, природні граничні умови найбільш загального вигляду отримуємо з рівнянь рівноваги пригараничної зони деформованого тіла. Взаємодія поверхні тіла з оточуючим середовищем моделюється пружними в'язями заданої жорсткості, щоб враховувати розподілені по поверхні тіла кінематичні впливи та прикладені до поверхні тіла розподілені силові впливи.

Граничні умови по змінній x приведені на рис.2

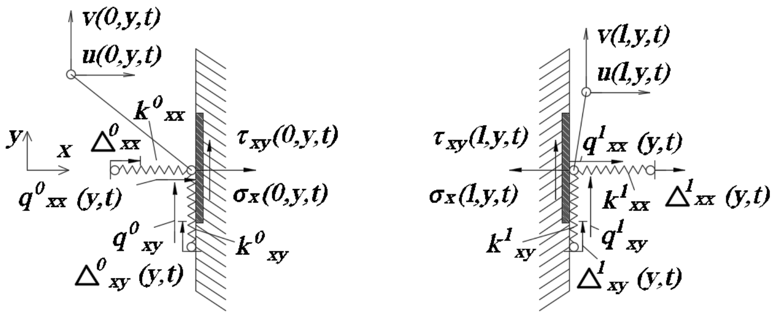

Рис.2. Граничні умови по змінній x

Тут $k_{xx}^0, k_{xy}^0, k_{xx}^l, k_{xy}^l$ - жорсткості пружних в'язей; $\Delta_{xx}^0, \Delta_{xy}^0, \Delta_{xx}^l, \Delta_{xy}^l$ - відомі значення кінематичних впливів; $q_{xx}^0, q_{xy}^0, q_{xx}^l, q_{xy}^l$ - силові навантаження. Усі впливи віднесені до одиниці площі.

З рівнянь рівноваги диференціального елемента пригранічної зони отримуємо співвідношення:

$$k_{xx}^{0}u(0,y,t)-\sigma_{x}(0,y,t)=k_{xx}^{0}\Delta_{xx}^{0}(y,t)+q_{xx}^{0}(y,t),$$
$$k_{xy}^{0}v(0,y,t)-\tau_{xy}(0,y,t)=k_{xy}^{0}\Delta_{xy}^{0}(y,t)+q_{xy}^{0}(y,t),$$
$$k_{xx}^{l}u(l,y,t)+\sigma_{x}(l,y,t)=k_{xx}^{l}\Delta_{xx}^{l}(y,t)+q_{xx}^{l}(y,t),$$
$$k_{xy}^{l}(l,y,t)+\tau_{xy}(l,y,t)=k_{xy}^{l}\Delta_{xy}^{l}(y,t)+q_{xy}^{l}(y,t).$$

Для подальшого використання наведені співвідношення необхідно поділити на відповідні коефіцієнти, в результаті маємо рівняння при $x=0$ та $x=l$:

$$\frac{k_{xx}^{0}}{\sqrt{1+(k_{xx}^{0})^{2}}}u(0,y)-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^{0})^{2}}}\sigma_{x}(0,y)=\frac{k_{xx}^{0}}{\sqrt{1+(k_{xx}^{0})^{2}}}\Delta_{xx}^{0}(y)+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^{0})^{2}}}q_{xx}^{0}(y),$$
$$\frac{k_{xy}^{0}}{\sqrt{1+(k_{xy}^{0})^{2}}}v(0,y)-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^{0})^{2}}}\tau_{xy}(0,y)=\frac{k_{xy}^{0}}{\sqrt{1+(k_{xy}^{0})^{2}}}\Delta_{xy}^{0}(y)+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^{0})^{2}}}q_{xy}^{0}(y),$$
$$\frac{k_{xx}^{l}}{\sqrt{1+(k_{xx}^{l})^{2}}}u(l,y)-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^{l})^{2}}}\sigma_{x}(l,y)=\frac{k_{xx}^{l}}{\sqrt{1+(k_{xx}^{l})^{2}}}\Delta_{xx}^{l}(y)+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^{l})^{2}}}q_{xx}^{l}(y),\qquad(23)$$
$$\frac{k_{xy}^{l}}{\sqrt{1+(k_{xy}^{l})^{2}}}v(l,y)-\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^{l})^{2}}}\tau_{xy}(l,y)=\frac{k_{xy}^{l}}{\sqrt{1+(k_{xy}^{l})^{2}}}\Delta_{xy}^{l}(y)+\frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^{l})^{2}}}q_{xy}^{l}(y).$$

Граничні умови в такому вигляді охоплюють кінематичні умови (якщо відповідне $k\to\infty$) та статичні умови (якщо відповідне $k\to 0$). Аналогічно приймаються граничні умови в тривимірних по просторових змінних рівняннях.

Граничні умови по дискретній змінній випливають з рівнянь рівноваги пригранічної зони при $y=h^{-}$ та h^{+} (рис.3).

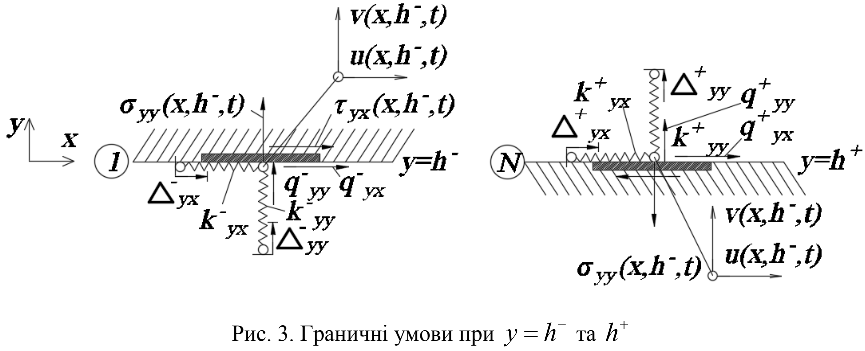

Рис. 3. Граничні умови при $y=h^{-}$ та h^{+}

Тут літерою k позначені жорсткості пружних в'язей, які забезпечують взаємодію тіла, що розглядається, з зовнішнім середовищем, Δ - позначені кінематичні впливи, q - силові впливи.

З рівнянь рівноваги отримуємо:

$$\begin{aligned}
&+\tau_{yx}(x,h^-,t)+q_{yx}^-(x,t)+k_{yx}^-(\Delta_{yx}^-(x,t)-u(x,h^-,t))=0,\\
&+\sigma_{yy}(x,h^-,t)+q_{yy}^-(x,t)+k_{yy}^-(\Delta_{yy}^-(x,t)-v(x,h^-,t))=0,\\
&-\tau_{yx}(x,h^+,t)+q_{yx}^+(x,t)+k_{yx}^+(\Delta_{yx}^+(x,t)-u(x,h^+,t))=0,\\
&-\sigma_{yy}(x,h^+,t)+q_{yy}^+(x,t)+k_{yy}^+(\Delta_{yy}^+(x,t)-v(x,h^+,t))=0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Пряма $y=h^-$ позначається номером 1, а пряма $y=h^+$ номером N, що відповідає значенням невідомих функцій на цих прямих. Оскільки відповідні значення елементів основного базису φ_1 та φ_N дорівнюють одиницям, то невідомі $\tau_{yx}(x,h^-,t)$, $\tau_{yx}(x,h^+,t)$, $\sigma_{yy}(x,h^-,t)$, $\sigma_{yy}(x,h^+,t)$, $u(x,h^-,t)$, $u(x,h^+,t)$, $v(x,h^-,t)$, $v(x,h^+,t)$ є, відповідно, контраваріантними компонентами (коефіцієнтами відносно основного базису) і далі будуть позначатися: $\tau_{yx}^1(x,t)$, $\tau_{yx}^N(x,t)$, $\sigma_{yy}^1(x,t)$, $\sigma_{yy}^N(x,t)$, $u^1(x,t)$, $u^N(x,t)$, $v^1(x,t)$, $v^N(x,t)$.

Остаточно отримані граничні умови записуємо у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
\tau_{yx}^1(x,t)&=k_{yx}^-u^1(x,t)-q_{yx}^-(x,t)-k_{yx}^-\Delta_{yx}^-(x,t),\\
\sigma_{yy}^1(x,t)&=k_{yy}^-v^1(x,t)-q_{yy}^-(x,t)-k_{yy}^-\Delta_{yy}^-(x,t),\\
\tau_{yx}^N(x,t)&=-k_{yx}^+u^N(x,t)+q_{yx}^+(x,t)+k_{yx}^+\Delta_{yx}^+(x,t),\\
\sigma_{yy}^N(x,t)&=-k_{yy}^+v^N(x,t)+q_{yy}^+(x,t)+k_{yy}^+\Delta_{yy}^+(x,t).
\end{aligned} \tag{25}$$

Початкові умови мають стандартний вигляд. Для рівняння теплопровідності одна початкова умова: при $t=0$ відомо значення температурної функції в усіх точках області D:

$$T(x,y,t)=T_0(x,y) \tag{26}$$

Для динамічних рівнянь теорії пружності в початковий момент часу повинно бути відомим переміщення в усіх точках області D та перша похідна від переміщень по часовій координаті в усіх точках області:

$$\begin{aligned}
u(x,y,0)&=u_0(x,y),\\
v(x,y,0)&=v_0(x,y),
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
u'(x,y,0)&=u_0'(x,y),\\
v'(x,y,0)&=v_0'(x,y).
\end{aligned} \tag{28}$$

Далі розглянемо послідовність та особливості побудови редукованих рівнянь (алгоритм зниження вимірності вихідних рівнянь). Формально, щоб побудувати редуковані рівняння, необхідно вихідні рівняння, граничні та початкові умови скалярно помножити на базисні функції ("спроектувати" на евклідовий простір). А точніше, кожній невідомій функції в усіх рівняннях поставити у відповідність сукупність її “проекцій” на кожен елемент базису, що визначений на відрізку $\left[0,l\right]$ осі $0x$.

Оскільки вище зазначалось, що редуковані рівняння слід будувати “в коефіцієнтах”, кожній функції ставити у відповідність сукупність її коефіцієнтів відносно прийнятого основного базису.

На цьому етапі виникають певні особливості при проектуванні розрахункових рівнянь – спочатку проектують рівняння Фур’є (для рівнянь теплопровідності) та закону Гука (для рівнянь теорії пружності). З рівнянь виключаються компоненти тензора деформацій, а потім, з певними змінами, необхідно проектувати рівняння теплового балансу та рівняння рівноваги.

Прослідкуємо за послідовністю математичних перетворень на прикладі характерних розрахункових рівнянь теорії теплопровідності та теорії пружності. Для одного з рівнянь закону Фур’є:

$$\left(q_y(x,y,t) = -\lambda_T \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \middle| , \varphi^i(y) \right) \Rightarrow q_y^i(x,t) = \left(-\lambda_T \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}, \varphi^i(y) \right)$$

Оскільки $q_y(x,y,t)$ входить до цього рівняння алгебраїчно, а залежність від змінних x,t вважається параметричною, то скалярний добуток цієї величини на елемент взаємного базису є контраваріантною компонентою (коефіцієнтом відносно основного базису).

$$\left(\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y}, \varphi^i(y) \right) = \int_{h^-}^{h^+} \left(\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \varphi^i(y) dy = \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial}{\partial y} (T^{\alpha}(x,t) \varphi_{\alpha}(y) g^{ij} \varphi_j = \right.$$

$$= T^{\alpha}(x,t) g^{ij} \int_{h^-}^{h^+} \varphi_j(y) \varphi_{\alpha}^{/}(y) dy = g^{ij} b_{j\alpha} T^{\alpha}(x,t)$$

Тут позначено

$$b_{j\alpha} = \int_{h^-}^{h^+} \varphi_j(y) \varphi_{\alpha}^{/}(y) dy, \tag{29}$$

$$\left\{ b_{j\alpha} \right\} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}5 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 0{,}5 & \mathrm{M} & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}5 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 0 \\ \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{L} & \mathrm{O} & \mathrm{L} & \mathrm{L} \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} & 0 & 0{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{M} & -0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

При обчисленні інтегралу попередньо необхідно було застосувати операцію опускання індексу, щоб перейти від взаємного базису до основного, елементи якого дуже прості функції (“функції-кришки”).

Остаточно маємо:

$$q_y^i(x,t) = -\lambda_T g^{ij} b_{j\alpha} T^\alpha(x,t) \tag{30}$$

Аналогічно будується редуковане рівняння для одного з рівнянь теорії пружності:

$$\begin{gathered}\left(\sigma_x(x,y,t) = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \lambda\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}, \varphi^i(y)\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sigma_x^i(x,t) = (\lambda+2\mu)\frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x} + \lambda g^{ij} b_{j\alpha} v^\alpha(x,t)\end{gathered} \tag{31}$$

Тут ліва частина редукованого рівняння отримана аналогічно виразу (30). Оскільки x і t необхідно розглядати в якості параметрів, то

$$\left(\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}, \varphi^i(y)\right) = \int_{h^-}^{h^+} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\varphi^i(y)dy = \frac{\partial}{\partial x}\int_{h^-}^{h^+} u(x,y,t)\varphi^i dy = \frac{\partial u^i(x,t)}{\partial x} \tag{32}$$

До рівнянь теплового балансу в теорії теплопровідності та рівнянь рівноваги входять екстенсивні невідомі, які мають меншу диференційованість ніж інтенсивні. Це накладає нові особливості на процес зниження вимірності вихідних рівнянь. Розглянемо це питання на прикладі одного рівняння рівноваги в двовимірній задачі динамічної теорії пружності:

$$\left(\frac{\rho\partial^2 u(x,y,t)}{dt^2} = \frac{\partial\sigma_x(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y} + X(x,y,t), \varphi^i(y)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho\partial^2 u^i(x,t)}{dt^2} = \frac{\partial\sigma_x^i(x,t)}{\partial x} + \left(\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}, \varphi^i(y)\right) + X^i(x,t)$$

$$\left(\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}, \varphi^i(y)\right) = \int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}\varphi^i(y)dy = \int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y} g^{ij}\varphi_j(y)dy$$

Для обчислення такого інтегралу не можна використовувати безпосередньо розклад екстенсивної величини τ_{xy} [16], необхідно попередньо "пом'якшити" інтеграл інтегруванням частинами, тобто

$$\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y} g^{ij}\varphi_j(y)dy = g^{ij}\int_{h^-}^{h^+}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}\varphi_j(y)dy =$$

$$= \left|\frac{\partial\tau_{xy}(x,y,t)}{\partial y}dy = dv, u = \varphi_j(y), v = \tau_{xy}(x,y,t), du = \varphi_j' dy \Rightarrow\right.$$

$$\Rightarrow g_{ij}\left[\tau_{xy}(x,y,t)\varphi_j\Big|_{h^-}^{h^+} - \int_{h^-}^{h^+}\tau_{xy}(x,y,t)\varphi_j' dy\right] =$$

$$= g_{ij}\left[\tau_{xy}(x,h^+,t)\varphi_j(h^+) - \tau_{xy}(x,h^-,t)\varphi_j(h^-) - \int_{h^-}^{h^+}\tau_{xy}^\alpha(x,t)\varphi_\alpha(y)\varphi_j'(y)dy\right]$$

У перетвореному інтегралі для його обчислення вже можна скористатися розкладом $\tau_{xy}(x,y,z)$, у результаті до редукованого рівняння увійшли значення функції τ_{xy} на першій та останній прямій:

$$\begin{aligned} \tau_{xy}(x,h^-,t) &= \tau_{xy}^1(x,t), \\ \tau_{xy}(x,h^+,t) &= \tau_{xy}^N(x,t), \end{aligned} \tag{33}$$

які необхідно замінити відповідними значеннями з граничних умов (25), а у випадку редукованих рівнянь теплового балансу – з граничних умов (21, 22). Саме таким чином у редукованих рівняннях теплопровідності та теорії пружності враховуються впливи, що діють з боку зовнішнього середовища на бокові поверхні тіла, що розглядається.

Граничні та початкові умови для редукованих розрахункових рівнянь будемо отримувати з вихідних граничних (19, 20, 23) та початкових умов (26, 27, 28), скалярним множенням їх на елементи взаємного базису. Оскільки всі ці умови мають вигляд алгебраїчних співвідношень, то формально їх можна побудувати, замінивши кожну розрахункову функцію у вихідних співвідношеннях контраваріантною компонентою з індексом $i=(\overline{1,N})$ і в результаті отримаємо:

Для рівнянь теплопровідності при $x=0$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\alpha_T^0)^2}} q_x^i(0,t) - q_{x,c}^{0,i}(t) = \frac{\alpha_T^0}{\sqrt{1+(\alpha_T^0)^2}} T^i(0,t) - \theta_c^{0,i}(t), \tag{34}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\alpha_T^0)^2}} (q_x^i(l,t) - q_{x,c}^{l,i}(t) = \frac{\alpha_T^0}{\sqrt{1+(\alpha_T^0)^2}} (T^i(l,t) - \theta_c^{l,i}(t), \tag{35}$$

Для рівнянь теорії пружності:

$$\begin{aligned} \frac{k_{xx}^0}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}} u^i(0,t) &= \frac{k_{xx}^0}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}} \Delta_{xx}^{0,i}(t) + \frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}} \Delta_{xx}^i(t) + \frac{1}{\sqrt{1+(k_{xx}^0)^2}} q_{xx}^{0,i}(t) \\ \frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}} v^i(0,t) &= \frac{k_{xy}^0}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}} \Delta_{xy}^{0,i}(t) + \frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}} \Delta_{xy}^i(t) + \frac{1}{\sqrt{1+(k_{xy}^0)^2}} q_{xy}^{0,i}(t) \end{aligned} \tag{36}$$

Модифікований метод прямих нескладно поширити на задачі, що визначені в областях досить складної форми. Нехай в декартовій системі координат розглядається плоска фігура (рис. 4) обмежена двома прямими, паралельними до осі $0x$, $y=h^-$, $y=h^+$ та двома кривими лініями $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$.

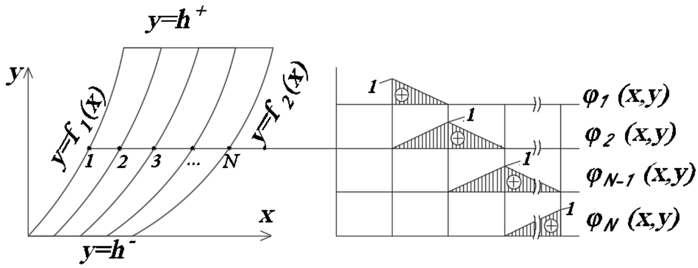

Рис. 4.

Кожен горизонтальний переріз області D, що відповідає фіксованому значенню x, розділимо на однакову кількість $(N-1)$ ділянок однакової довжини $\Delta(x)=\dfrac{f_2(x)-f_1(x)}{N-1}$. Множина точок з однаковим номером утворить геометричне місце – криву лінію $\psi_i(x=f_1(x)+\Delta(x)(i-1))$, причому $\psi_1(x)=f_1(x)$, $\psi_N(x)=f_2(x)$ і саме з цими лініями зв'яжемо систему базисних функцій $\varphi_i(x,y)$. Якщо область D прямокутна, то система описаних ліній перетворюється на систему прямих, з чого випливає, що застосування таких ліній для областей суттєво розширює можливості методу прямих. Для таких областей будемо зберігати назву методу "метод прямих".

Система базисних функцій залежить від дискретної та неперервної змінних [16].

Скалярний добуток підкреслює залежність границь інтегрування від параметра:

$$(f(y),g(y))=\int_{h^-}^{h^+} f(y)g(y)dy$$

Особливістю зниження вимірності вихідних рівнянь для вибраних областей є формула зниження вимірності виразу з похідною по x [12]:

$$\left(\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\varphi_i(x,y)\right)=\int_{h^-_{(x)}}^{h^+_{(x)}}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x},\varphi_i(x,y)dy=\frac{du_i}{dx}-\frac{dh^+(x)}{dx}u^N\delta_i^N+ \\ +\frac{dh^-(x)}{dx}u^1\delta_i^1-\frac{d\Delta(x)}{dx}d_{ij}u^j \tag{37}$$

Матрицю $\{d_{ij}\}$ наведено в роботі [15].

Модифікований метод прямих легко поширюється на зниження вимірності рівнянь математичної фізики по двох просторових координатах. Нехай вихідна задача визначена в прямокутній області, віднесеної до прямокутної декартової системи координат $y0z$, та є можливість знизити вимірність вихідних рівнянь стаціонарної або нестаціонарної теплопровідності, статичних чи динамічних рівнянь по двох просторових координатах, наприклад, y та z в прямокутній області D.

На область D наноситься N_y прямих, паралельних до осі $0y$ та N_z прямих, паралельних до осі $0z$.

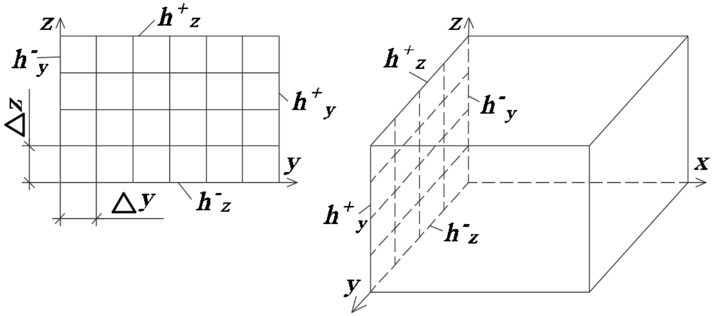

Рис. 5.

У зв'язку із застосуванням індексної форми запису по двох координатах, змінній y ставляться у відповідність індекси $i, j, \alpha, \beta, \gamma$, які приймають значення від 1 до N, змінній $z - k,l,\varepsilon,\omega,\eta.$ З кожною системою прямих зв'яжемо систему "функцій-кришок" $\varphi_i(y)$ та $\varphi_k(z)$ відповідно. Побудуємо систему $N_y \times N_z$ функцій двох змінних

$$\psi_{ik}(y,z) = \varphi_i(y) \times \varphi_k(z),\ i = \overline{1,N_y},\ k = \overline{1,N_z}. \tag{38}$$

Функції визначені в евклідовому просторі із скалярним добутком

$$\left(f(y,z), g(y,z)\right) = \int_{h_z^-}^{h_z^+}\int_{h_y^-}^{h_y^+} f(y,z), g(y,z)dydz$$

Будь-яка функція, що описує фізичну характеристику НДС або теплового поля, може бути представлена у вигляді:

$$f(y,z) = f^{ik}\varphi_i(y)\varphi_k(z), \tag{39}$$

$$\text{або } F(x,y,z) = F^{ik}(x)\varphi_i(y)\varphi_k(z) \tag{40}$$

Оскільки скалярний добуток функцій, визначених у прямокутній області, має вигляд:

$$\begin{gathered}(f(y,z),\psi(y,z) = (f^{ik}\varphi_i(y)\varphi_k(z), d^{\alpha l}\varphi_\alpha(y)\varphi_l(z)) = \\ f^{ik}d^{\alpha l}((\varphi_i(y)\varphi_\alpha(y))(\varphi_k(z),\varphi_l(z)) = f^{ik}d^{\alpha l}g_{i\alpha}g_{kl},\end{gathered} \tag{41}$$

То з цього співвідношення випливає, що зниження вимірності по двох змінних, яке визначається скалярним добутком рівнянь на базисні функції, можна виконувати спочатку по одній координаті, а потім знижувати вимірність редукованого рівняння по іншій коорднаті.

У класичному варіанті методу прямих існує нестандартний підхід до розв'язання граничних задач, визначених у двовимірних областях неканонічної форми, що значно розширює застосування класичного методу прямих. Але цей підхід суттєво базується на можливості аналітично побудувати фундаментальну систему розв'язків редукованих рівнянь. Авторами даної роботи, в публікації [15], показано, як поширити на ці складні задачі модифікований метод прямих.

У згаданій роботі чисельний метод базується на зведенні граничної задачі до певної кількості задач Коші. Таким чином будувалася фундаментальна система розв'язків однорідних рівнянь, з яких утворювалась фундаментальна матриця $z(x_i)$ та частковий розв'язок неоднорідних рівнянь $\dot{z}_0$. Для збереження стійкості обчислювального процесу застосовувалась ортогоналізація в певних точках відрізку визначення. І саме тут виникали певні ускладнення, які значно погіршували алгоритм. Оскільки в точках ортогоналізації змінювався базис, система початкових розв'язків, то відповідно в кожній точці ортогоналізації відповідно змінювалися сталі інтегрування, які потім знаходяться з граничних умов. Це призводило до значного ускладнення обчислювального алгоритму.

Спрощення можливе за рахунок нового алгоритму розв'язування задач Коші. Редуковані рівняння є "жорсткими" [19]. Для розв'язування задач Коші для "жорстких" рівнянь використовують метод Гіра [19]. Це багатоточковий неявний алгоритм, який завжди стійкий і збігається з певною точністю.

При застосуванні методу Гіра до побудови фундаментальної матриці та початкового розв'язку неоднорідного рівняння не змінюється базис і відповідно константи інтегрування, які потім знаходяться з граничних умов. Такий підхід значно розширює коло задач, які зручно розв'язувати модифікованим методом прямих.

Література

1. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 288 с
2. Чибиряков, В.К. Обобщенный метод конечных интегральных преобразований в задачах статики и динамики массивных элементов конструкций: автореферат дис. … доктора технических наук: 01.02.03 / Моск. инж.-строит. ин-т им. В.В. Куйбышева. - Москва, 1988. - 39 с.
3. Канторович Л.В. Об одном методе приближенного решения дифференциальных уравнений в частных производных. ДАН СССР, 1934 – С. 21-34.

4. Винокуров Л.П. Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. Харьков. Изд-во Харьк. ун-та, 1956.

5. Винокуров Л.П. Решение пространственной задачи теории упругости в перемещениях. «Бюллетень Харьковского инженерно-строительного института», 1940, №18. – С.59-73.

6. Шкелёв Л.Т. Метод прямых и его использование при определении напряженного и деформированного состояний пластин и оболонок. / [Л.Т. Шкелёв, Ю.А. Морсков, ТА. Романова, и др.] – К.: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177 с.

7. Шкелёв Л.Т. Использование метода прямых для решения бигармонического уравнения. В. Сб. «Реферативная информация о законченых научно-исследовательских работах в ВУЗах УССР. Строительная механика, расчет сооружений» Вып 2, Киев, «Вища школа» – 1971. – С. 54-66.

8. Шкелёв Л.Т. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояний пространственных и пластинчатых конструктивных элементов / [Л.Т. Шкелёв, А.Н. Станкевич, Д.В. Пошивач и др.]: Монография. – К.: КНУСА, 2004. -136 с.

9. Григоренко Я.М. О решении задач статики слоистых оболочек в трехмерной постановке / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д Панкратова // Вычислительная и прикл. математика – 1981. – Вып. 43. – С.123-132.

10. Влайков Г.Г. Некоторые осесимметричные задачи статики и динамики анизотропных тел цилиндрической формы / Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко; НАН Украины. Техн. центр. – К., 1998. – 58 с.

11. Влайков Г.Г. Некоторые задачи теории упругости для анизотропных цилиндров с некруговым поперечным сечением / Г Г. Влайков, А.Я. Григоренко, С.Н. Шевченко// НАН Украины. Ин-т механики им. С.П.Тимошенко. Техн. центр. – К., 2001. – 148 с.

12. Чибіряков В.К. Зниження вимірності рівнянь статики товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, А.А. Сташук // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2012. - Вип. 89. - С. 58-67

13. Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В., Мельничук В.Ф. Про підвищення точності узагальненого методу прямих // містобудування та територіальне планування: наук.-техн. збірник. київ.: кнуба, 2014. вип. 53. С. 565–574.

14. Чибіряков В.К. Про одну розрахункову модель для дослідження деформацій дамб та гребель та обгрунтування точності геодезичних

спостережень / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, В.С. Старовєров, Г.С. Акчуріна, О.А. Шорін // Інженерна геодезія. - 2016. - Вип. 63. - С. 21-34.

15. Чибіряков В.К. Узагальнений метод прямих в задачах теорії пружності для областей складної форми / В.К. Чибіряков, А.М. Станкевич, А.О. Краснєєва, О.А. Шорін // Вісник Одеської державної академії будівництва та архітектури. - 2017. - Вип. 67. - С. 71-77.

16. А.М. Станкевич, Д.В. Левківський. Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом "прямих". / А. М. Станкевич, Д. В. Левківський // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 49. – Київ, КНУБА, 2013. – С. 509-521.

17. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы./ Г.И. Марчук, В.И. Агошков. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 416 с.

18. Бурбаки Н. Алгебра: Алгебраические структуры. Линейная и полилинейная алгебра. - М.: Физматлит, 1962. - 516 с.

19. Дж. Ортега, У. Пул. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. - 288 с.

д.т.н., профессор Чибиряков В.К.,
к.т.н., доцент, Станкевич А.М.,
к.т.н., доцент Кошевой О.П., к.т.н., доцент Левковский Д.В.,
Краснеева А.О., Пошивач Д.В.,Чубарев А.Г.,
Шорин О.А., Янсонс М.О., Сович Ю.В.
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ПРЯМЫХ, АЛГОРИТМ ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ, ВОЗМОЖНОСТИ И ПЕРСПЕКТИВЫ.

В работе приведены основные идеи и возможности модифицированного метода прямых, для решения задач теории упругости и термоупругости. Описаны процедура снижения размерности с помощью проекционного метода Бубнова-Петрова. Предложено универсальный подход для учета граничных условий, обобщенно подход на области сложной формы. Приведены основные метрические тензоры, определенная метрика евклидова пространства. Доказано возможности и перспективы предложенного метода.

Данный метод включает в себя два последовательных этапа. На первом этапе, с помощью проекционного метода, выполняется снижение размерности исходных дифференциальных уравнений, начальных и граничных условий. Для этого используется система локально-базисных функций. На втором этапе редуцированные дифференциальные уравнения записываются в виде обыкновенных дифференциальных уравнений в форме Коши, которые зависят от одной пространственной координаты.

Редуцирована система уравнений и граничных условий решается численным методом Гира. Статья является обзорной и включает в себя основные особенности, возникающие при применении модифицированного метода прямых для различных задач теории упругости, динамики и термоупругости.

Ключевые слова: модифицированный метод прямых, теория упругости, термоупругость, базисные функции, проекционный метод, граничные условия, метод Гира.

doctor of Technical Sciences, Professor Chibiryakov V.K.,
Ph.D., associate Professor Stankevy`ch A.M.,
Ph.D., associate Professor Koshevy`j O.P.,
Ph.D., associate Professor Levkivs`ky`j D.V.,
Krasneyeva A.O.,Poshy`vach D.V.,Chubarev A.G.,
Shorin O.A., Yansons M.O., Sovy`ch Yu.V.
Kyiv National University of Civil Engineering and Architecture

MODIFIED METHOD OF LINE, ALGORITHM OF ITS APPLICATION, POSSIBILITIES AND PERSPECTIVES.

In this paper, the main ideas and possibilities of the modified method of lines for solving the problems of the theory of elasticity and thermoelasticity are presented. A procedure for reducing the dimensionality with the projection method of Bubnov-Petrov is described. The universal approach for taking boundary conditions into account is proposed, the approach in the region of complex geometric form is generalized. The basic metric tensors are given, the metric of the Euclidean space is defined. The possibilities and prospects of the proposed method are proved.

This method involves two successive stages. In the first stage, with the help of a projection method, the dimensionality of the initial differential equations, initial and boundary conditions is reduced. To do this a system of locally-basic functions is used. At the second stage the reduced differential equations are written in the form of ordinary differential equations in the Cauchy's form which depend on one spatial coordinate.

The reduced system of equations and boundary conditions is solved numerically by the Gear's method. The article is a survey and includes the main

features that arise when applying the modified method of lines for various problems of the theory of elasticity, dynamics and thermoelasticity.

Keywords: modified direct method, elasticity theory, thermoelasticity, basic functions, projection method, boundary conditions, Gear method.

REFERENCES

1. Vekua I.N. Nekotory`e obshhie metody` postroeniya razlichny`kh variantov teorii obolochek. – M.: Nauka, 1982. – 288 s

2. Chibiryakov, V.K. Obobshhenny`j metod konechny`kh integral`ny`kh preobrazovanij v zadachakh statiki i dinamiki massivny`kh e`lementov konstrukczij: avtoreferat dis. … doktora tekhnicheskikh nauk: 01.02.03 / Mosk. inzh.-stroit. in-t im. V. V. Kujby`sheva. - Moskva, 1988. - 39 s.

3. Kantorovich L.V. Ob odnom metode priblizhennogo resheniya differenczial`ny`kh uravnenij v chastny`kh proizvodny`kh. DAN SSSR, 1934 – C. 21-34.

4. Vinokurov L.P. Pryamy`e metody` resheniya prostranstvenny`kh i kontaktny`kh zadach dlya massivov i fundamentov. Khar`kov. Izd-vo Khar`k. un-ta, 1956.

5. Vinokurov L.P. Reshenie prostranstvennoj zadachi teorii uprugosti v peremeshheniyakh. «Byulleten` Khar`kovskogo inzhenerno-stroitel`nogo instituta», 1940, #18. – C.59-73.

6. Shkelyov L.T. Metod pryamy`kh i ego ispol`zovanie pri opredelenii napryazhennogo i deformirovannogo sostoyanij plastin i obolonok. / [L.T. Shkelyov, Yu.A. Morskov, TA. Romanova, i dr.] – K.: Naczional`naya akademiya nauk Ukrainy`, Institut mekhaniki im. S.P. Timoshenko, Tekhnicheskij czentr, 2002. - 177 s.

7. Shkelyov L.T. Ispol`zovanie metoda pryamy`kh dlya resheniya bigarmonicheskogo uravneniya. V. Sb. «Referativnaya informacziya o zakoncheny`kh nauchno-issledovatel`skikh rabotakh v VUZakh USSR. Stroitel`naya mekhanika, raschet sooruzhenij» Vy`p 2, Kiev, «Vishha shkola» – 1971. – C. 54-66.

8. Shkelyov L.T. Primenenie metoda pryamy`kh dlya opredeleniya napryazhennogo i deformirovannogo sostoyanij prostranstvenny`kh i plastinchaty`kh konstruktivny`kh e`lementov / [L.T. Shkelyov, A.N. Stankevich, D.V. Poshivach i dr.]: Monografiya. – K.: KNUSA, 2004. -136 s.

9. Grigorenko Ya.M. O reshenii zadach statiki sloisty`kh obolochek v trekhmernoj postanovke / Ya. M. Grigorenko, A. T. Vasilenko, N. D Pankratova // Vy`chislitel`naya i prikl. matematika – 1981. – Vy`p. 43. – S.123-132.

10. Vlajkov G.G. Nekotory`e osesimmetrichny`e zadachi statiki i dinamiki anizotropny`kh tel czilindricheskoj formy` / G.G. Vlajkov, A.Ya. Grigorenko; NAN Ukrainy`. Tekhn. czentr. – K., 1998. – 58 c.

11. Vlajkov G.G. Nekotory`e zadachi teorii uprugosti dlya anizotropny`kh czilindrov s nekrugovy`m poperechny`m secheniem / G G. Vlajkov, A.Ya. Grigorenko, S.N. Shevchenko// NAN Ukrainy`. In-t mekhaniki im. S.P.Timoshenko. Tekhn. czentr. – K., 2001. – 148 c.

12. Chy`biryakov V.K. Zny`zhennya vy`mirnosti rivnyan` staty`ky` tovstoyi plasty`ny` zminnoyi tovshhy`ny` uzagal`neny`m metodom pryamy`x / V.K. Chy`biryakov, A.M. Stankevy`ch, A.A. Stashuk // Opir materialiv i teoriya sporud. - 2012. - Vy`p. 89. - S. 58-67

13. Chy`biryakov V.K., Stankevy`ch A.M., Levkivs`ky`j D.V., Mel`ny`chuk V.F. Pro pidvy`shhennya tochnosti uzagal`nenogo metodu pryamy`x // mistobuduvannya ta tery`torial`ne planuvannya: nauk.-texn. zbirny`k. ky`yiv.: knuba, 2014. vy`p. 53. S. 565–574.

14. Chy`biryakov V.K. Pro odnu rozraxunkovu model` dlya doslidzhennya deformacij damb ta grebel` ta obgruntuvannya tochnosti geodezy`chny`x sposterezhen` / V.K. Chy`biryakov, A.M. Stankevy`ch, V.S. Starovyerov, G.S. Akchurina, O.A. Shorin // Inzhenerna geodeziya. - 2016. - Vy`p. 63. - S. 21-34.

15. Chy`biryakov V.K. Uzagal`neny`j metod pryamy`x v zadachax teoriyi pruzhnosti dlya oblastej skladnoyi formy` / V.K. Chy`biryakov, A.M. Stankevy`ch, A.O. Krasnyeyeva, O.A. Shorin // Visny`k Odes`koyi derzhavnoyi akademiyi budivny`cztva ta arxitektury`. - 2017. - Vy`p. 67. - S. 71-77.

16. A.M. Stankevy`ch, D.V. Levkivs`ky`j. Try` varianty` redukciyi rivnyan` ploskoyi zadachi teoriyi pruzhnosti metodom “pryamy`x”. / A. M. Stankevy`ch, D. V. Levkivs`ky`j // Mistobuduvannya ta tery`torial`ne planuvannya: Nauk.-texn. Zbirny`k. – Vy`p. 49. – Ky`yiv, KNUBA, 2013. – S. 509-521.

17. Marchuk G.I. Vvedenie v proekczionno-setochny`e metody`./ G.I. Marchuk, V.I. Agoshkov. – M.: Nauka. Glavnaya redakcziya fiziko-matematicheskoj literatury`, 1981. – 416 s.

18. Burbaki N. Algebra: Algebraicheskie struktury`. Linejnaya i polilinejnaya algebra. - M.: Fizmatlit, 1962. - 516 s.

19. Dzh. Ortega, U. Pul “Vvedenie v chislenny`e metody` resheniya differenczial`ny`kh uravnenij”. M.: Nauka, 1986. - 288 s