DOI: 10.32347/2076-815x.2020.75.371-378
УДК 536.24

к.т.н., доцент **Човнюк Ю.В.**,
ychovnyuk@ukr.net, ORCID: 0000-0002-0608-0203,
Національний університет біоресурсів і природокористування України
доцент **Чередніченко П.П.**,
petro_che@ukr.net, ORCID: 0000-0001-7161-661x,
Москвітіна А.С.,
moskvitina.as@knuba.edu.ua, ORCID: 0000-0003-3352-0646,
Київський національний університет будівництва і архітектури

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДУ РОЗДІЛЕННЯ ЗМІННИХ (ФУР'Є) ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ У БАГАТОШАРОВИХ СЕРЕДОВИЩАХ

Розглянуті питання нестаціонарної теплопровідності у багатошарових об'єктах. Запропонований розв'язок граничної однорідної задачі з нестаціонарними граничними умовами третього роду. У основу розв'язку покладені: метод розділення змінних Фур'є за власними функціями задачі та інтеграл Дюамеля. Запропонована формула розв'язку має явний вид і завдяки рекурентній формі запису основних співвідношень може бути корисною при чисельних розрахунках.

Ключові слова: гранична задача; рівняння теплопровідності Фур'є; багатошаровий об'єкт; нестаціонарні граничні умови третього роду.

Постановка проблеми. Антикорозійне покриття труб, осідання солей жорсткості на стінках труб в системах гарячого водопостачання, опалення, холодопостачання, змієвиках зарядки та розрядки теплових акумуляторів [1-3], змієвиках теплообмінних апаратів [4] та багатошарова конструкція металопластикових труб для системи опалення та «теплої підлоги» являє собою додатковий тепловий опір для передачі тепла від теплоносія в навколишній простір. Цей опір необхідно враховувати при розрахунках тепловіддачі з поверхні труби, як для підвищення ефективності теплообмінних апаратів, так і для розрахунку непродуктивних тепловтрат в навколишнє середовище від магістральних трубопроводів та стояків інженерних систем.

Актуальність дослідження. В процесі проектування перед фахівцями постає питання, як зменшити або збільшити тепловіддачу 1 м сталевої труби. Для збільшення потрібно змінити інфрачервоне випромінювання в більшу сторону. Робиться це за допомогою фарби. Червоний колір підвищує тепловіддачу. Краще, якщо фарба матова. Інший підхід - встановити ребра. Вони монтується зовні. Це дозволить збільшити площу тепловіддачі. А для системи «тепла підлога» або змійовика, зануреного в тверду середу (наприклад, ґрунтовий колектор теплового насосу або змійовик зарядки/розрядки теплового акумулятора з твердим теплоакумулюючим матеріалом), необхідно правильно розрахувати тепловіддачу 1 м труби, щоб забезпечити нагрів або охолодження цієї труби до потрібних параметрів. У яких же випадках потрібно параметр зменшити? Необхідність виникає при оптимізації ділянки трубопроводу, розташованого поза житловою зоною, в неопалюваному об'ємі. Тоді фахівці рекомендують утеплити ділянку - ізолювати його від зовнішнього середовища.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Згідно з даними М. Якоба [5], формули теплопередачі теплопровідністю через плоскі стінки часто з достатньою точністю можуть бути застосовані також і для циліндричних стінок, якщо теплопередаючу поверхню взяти по середній товщині. При цьому велика кількість практичних завдань розрахунку температурних полів у багатошарових об’єктах можуть розраховуватись як одновимірні [6]. Автор [7] запропонував аналітичний розв’язок однорідної задачі нестаціонарної теплопровідності у багатошарових об’єктах за стаціонарних граничних умов третього роду.

Формулювання цілей статті. Вивести аналітичний розв’язок однорідної задачі нестаціонарної теплопровідності у багатошарових об’єктах за нестаціонарних граничних умов третього роду.

Виклад основного матеріалу. Особливості протікання процесу на границях стінки при теплопередачі визначаються граничними умовами третього роду, що характеризуються температурами середовищ по обидві сторони стінки, а також відповідними коефіцієнтами тепловіддачі [8]. Нижче наведений розв’язок однорідної задачі нестаціонарної теплопровідності у багатошарових об’єктах за нестаціонарних граничних умов третього роду, для прикладу вибрана багатошарова труба (рис.1.).

У загальному випадку математична постановка одновимірної задачі теплопровідності для багатошарових об’єктів визначається наступною системою одновимірних рівнянь [9]:

$$\frac{\partial T_i(r,t)}{\partial T} = a_i \cdot \triangle^2 T_i(r,t), x_{i-1} \le r \le x_i, i = 1, 2, ..., n. \qquad (1)$$

де, $Ti(r,t)$, a_i - відповідно температурне поле та коефіцієнти температуропровідності і-го прошарку; x_o, x_n - відповідно координати нижньої та верхньої геометричної (вільної) поверхні об'єкту (при n=1 – прошарків усього два).

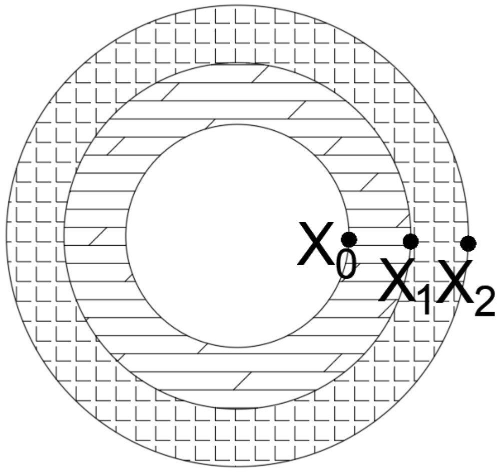

Рис.1. Розрахункова модель багатошарового об'єкту.

Граничні умови на вільних поверхнях r = x_o, r = x_n, визначаємо як нестаціонарні граничні умови третього роду. У такому випадку запишемо:

$$\left[T_1(r,t)+h_i\,\frac{\partial T_1(r,t)}{\partial r}\right]\Bigg|_{r=x_0}=\varphi_1(t),\left[T_n(r,t)+h_2\cdot\frac{\partial T_n(r,t)}{\partial r}\right]\Big|_{r=x_n}=\varphi_2(t). \qquad (2)$$

Граничні умови спряження температурних полів та теплових потоків на границях розділу прошарків, у загальному виді, визначаються нестандартними виразами:

$$\begin{cases}\left[T_i(r,t)=T_{i+1}(r,t)\right]\Big|_{r=k_i},\left[\lambda_i\cdot\dfrac{\partial T_i(r,t)}{\partial r}=\lambda_{i+1}\cdot\dfrac{\partial T_{i+1}(r,t)}{\partial r}\right]\Big|_{r=x_i},\\ i=1,2...,n-1,\end{cases} \qquad (3)$$

де, λ_i - теплопровідність і-го прошарку.

Початковий розподіл температурних полів у кожному прошарку має вид:

$$T_i(r,0)=f_i(r), i=1,2,...,n. \qquad (4)$$

Якщо подати шуканий розв'язок задачі у вигляді суми:

$$T_i(r,t)=f_i(r)+v_i(r,t), \qquad (5)$$

Тоді задача зводиться до визначення функцій $v_i(r,t),$ які є розв'язанням задачі з нульовими початковими умовами $v_i(r,o)=0,$ і задовольняють рівняння (1) - (3).

Розв'язок задачі з неоднорідними граничними умовами, залежить від часу, $v_i(r,t),$ може бути визначений інтегралом Дюамеля [10, 11]:

$$v_i(r,t)=\int_0^t\frac{\partial}{\partial t}\left\{\dot v_i(r,\tau,t-\tau)\right\}\partial t, \text{ при t>0}, \qquad (6)$$

де $\dot v_i(r,\tau,t)$- розв'язок задачі при умові що τ є параметром.

У відповідності із отриманим нами розв'язанням функції $v_i(r,t)$ мають вид:

$$v_i(r,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\left\{-\mu_{i,m}{}^2\cdot a_i\cdot\int_0^t C_m(\tau)\cdot\exp(\mu_{i,m}{}^2\cdot a_i\cdot\tau)d\tau\ \right\}\cdot\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}\cdot r)\cdot\exp(-\mu_{i,m}{}^2\cdot a_i\cdot t) \quad (7)$$

де, $\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}\cdot r)$- власні функції задачі.

$$\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}\cdot r)=.\left\{\prod_{k=1}^{i}Z_k\right\}\cdot\left[Y_1(\mu_{i,m}\cdot r)+B_{i,m}\cdot Y_2(\mu_{i,m}\cdot r)\right],i=1,2,...,n. \quad (8)$$

$$B_{1,m}=-\frac{Y_1(\mu_{i,m}\cdot x_0)+h_1\cdot Y_1^{/}(\mu_{i,m}\cdot x_0)}{Y_2(\mu_{i,m}\cdot x_0)+h_1\cdot Y_2^{/}(\mu_{i,m}\cdot x_0)} \quad (9)$$

$$\begin{cases} B_{1,m}=\dfrac{\{\lambda_i\cdot\dfrac{Y_1^{/}(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}{Y_1(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}-\lambda_{i-1}\cdot\dfrac{Y_1^{/}(\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})+B_{i-1,m}\cdot Y_2^{/}(\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})}{Y_1\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})+B_{i-1,m}\cdot Y_2\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})}\ \}}{\{\lambda_i\cdot\dfrac{Y_2^{/}(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}-\lambda_{i-1}\cdot\dfrac{Y_1^{/}(\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})+B_{i-1,m}\cdot Y_2^{/}(\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})}{Y_1\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})+B_{i-1,m}\cdot Y_2\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})}\ \}}\cdot\left\{\dfrac{Y_1(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}{Y_2(\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})}\ \right\} \\ i=1,2,...,n. \end{cases} \quad (10)$$

$$Z_1=1,Z_i=\frac{Y_1\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})+B_{i-1,m}\cdot Y_2\ (\mu_{i-1,m}\cdot x_{i-1})}{Y_1\ (\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})+B_{i,m}\cdot Y_2\ (\mu_{i,m}\cdot x_{i-1})},i=1,2,...,n. \quad (11)$$

де, $\mu_{i,m}=\mu_{n,m}\cdot\sqrt{a_n/a_i},\mu_{n,m}$- власні числа задачі, які визначаються згідно рівняння:

$$\begin{cases} Y_1\ (\mu_{n,m}\cdot x_n)+h_2\cdot Y_1^{/}(\mu_{n,m}\cdot x_n)+B_{n,m}\cdot\left\{Y_2(\mu_{n,m}\cdot x_n)+h_2\cdot Y_2^{/}(\mu_{n,m}\cdot x_n)\ \right\}=0 \\ m=1,2,..., \end{cases} \quad (12)$$

$$C_m(\tau)=-\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{a_i}\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}\psi_i(r,\tau)\cdot G(r)\cdot\dot{F}_{i,m}(\mu_{i,m}\cdot r)dr\right]/\left\{\sum_{i=1}^{n}\dot{I}_i^2\ \right\}, \quad (13)$$

$$\psi_i(r,\tau)=\varphi_1(\tau)+\left[\dot{\alpha}_i(\tau)\cdot\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)\right]\cdot\left[\xi(r)+\dot{\beta}_i(\tau)\right], \quad (14)$$

$$\begin{cases} \dot{\beta}_1(\tau)=-\left[\xi(x_0)+h_1\cdot\xi^{/}(x_0)\right]=0,\dot{\beta}_i(\tau)=\dfrac{\lambda_i}{\lambda_{i-1}}\cdot\left[\xi(x_{i-1})+\dot{\beta}_{i-1}\right]-\xi(x_{i-1}) \\ i=2,3,...,n, \end{cases}, \quad (15)$$

$$\dot{\alpha}_i=\frac{\lambda_n}{\lambda_i}\cdot\frac{1}{\{\xi(x_n)+\dot{\beta}_n(\tau)+\dot{\beta}_n(\tau)+h_2\cdot\xi^{/}(x_n)\ \}},i=1,2,...,n, \quad (16)$$

$$\dot{I}_i^2=\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\cdot\int_{x_{i-1}}^{x_i}G(r)\cdot\dot{F}_{i,m}^2(\mu_{i,m}\cdot r)dr. \quad (17)$$

Таким чином, розв'язок системи (1) - (4) одночасно визначається виразами (5) - (17). Вагова функція G(r) та функції $\xi(r),Y_1(\mu_i\cdot r)$ та $Y_2(\mu_i\cdot r)$ у різних системах координат визначаються наведеними нижче виразами (18) - (20).

Вагова функція G(r), а також вид функцій $\xi(r),Y_1(\mu_i\cdot r)$ та $Y_2(\mu_i\cdot r)$ у декартовій (прямокутній) системі координат:

$$G(r)=1,\xi(r)=r,Y_1(\mu_i\cdot r)=\sin(\mu_i\cdot r),Y_2(\mu_i\cdot r)=\cos(\mu_i\cdot r) \quad (18)$$

де, (штрих біля конкретної функції означає однократне диференціювання по аргументу цієї функції)

Вагова функція G(r), а також вид функції $\xi(r), Y_1(\mu_i \cdot r)$ та $Y_2(\mu_i \cdot r)$ у сферичній системі координат:

$$G(r) = r^2, \xi(r) = \frac{1}{r}, Y_1(\mu_i \cdot r) = \frac{1}{r} \cdot \sin(\mu_i \cdot r), Y_2(\mu_i \cdot r) = \frac{1}{r} \cdot \cos(\mu_i \cdot r) \qquad (19)$$

Вагова функція G(r), а також вид функції $\xi(r), Y_1(\mu_i \cdot r)$ та $Y_2(\mu_i \cdot r)$ у циліндричній системі координат:

$$G(r) = r, \xi(r) = h_1 r, Y_1(\mu_i \cdot r) = I_0(\mu_i \cdot r), Y_2(\mu_i \cdot r) = N_0(\mu_i \cdot r) \qquad (20)$$

де, $I_0(z)$ - функція Бесселя аргументу z нульового порядку, $N_0(z)$ - функція Неймана аргументу z нульового порядку.

Висновок: За допомогою методу розділення змінних Фур'є за власними функціями задачі та інтегралу Дюамеля виконано розв'язок граничної однорідної задачі з нестаціонарними граничними умовами третього роду, що допоможе в розрахунках теплопередачі багатошарового об'єкту. При чисельних розрахунках, можна використовувати запропоновану формулу розв'язку, оскільки вона має рекурентну форму запису основних співвідношень.

Бібліографічний список:

1. Любарець О.П., Москвітіна А.С. Аналіз конструкцій сезонних теплоакумуляторів для забезпечення систем гарячого водопостачання та опалення в котеджному будівництві //Вентиляція, освітлення та теплогапостачання. 2015. №18. – С. 61-69.
2. Жітаренко В. М. Відновлювані і вторинні джерела енергії – Маріуполь : ПДТУ, 2006. – 200 с.
3. Колобков П.С. Використання теплових вторинних енергоресурсів в теплопостачанні – Харків : Основа, 1991. – 224 с.
4. Ефимов А.Л. Исследование теплообмена и гидродинамики в каналах теплообменных аппаратов сложной геометрии : автореф. дис. канд. техн. наук / Ефимов А.Л. – М. : МЭИ, 1980. – 20 с.
5. Якоб, М. Вопросы теплопередачи [Текст] : пер. с англ. / Под ред. В.П. Мотулевича. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. –518 с.
6. Крейт Ф. Основы теплопередачи / пер. с англ. Ф. Крейт, В. Блэк. – М. :Мир, 1983. – 512 с.

7. Даниленко Т.К. Влияние теплопроводности стенки на процесс теплообмена в канале // Труды МВТУ, 1974. – № 193. – С. 160 – 165.

8. Корольков Б.П. Специальные функции для исследования динамики нестационарного теплообмена – М. : Наука, 1976. – 168 с.

9. Вендин С.В. К расчету нестационарной теплопроводности в многослойных объектах при граничных условиях третьего рода. Инженерно-физический журнал. 1993 т.65, №2. – С.249-251.

10. Карташов Э.М. Статистические методы в теории теплопроводности твердых тел. – М.: Высшая школа,2001. – 550с.

11. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.:Наука, 1984. – 835с.

к.т.н., доц. Човнюк Ю.В.,
Национальный университет биоресурсов и природопользования Украины,
доцент Чередниченко П.П., Москвитина А.С.,
Киевский национальный университет строительства и архитектуры

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ (ФУРЬЕ) ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ.

Антикоррозийное покрытие труб, осадки солей жесткости на стенках труб в системах горячего водоснабжения, отопления, холодоснабжения, змеевиках зарядки и разрядки тепловых аккумуляторов, змеевиках теплообменных аппаратов и многослойная конструкция металлопластиковых труб для системы отопления и «теплого пола» представляет собой дополнительное тепловое сопротивление для передачи тепла от теплоносителя в окружающую среду. Это сопротивление необходимо учитывать при расчетах теплоотдачи с поверхности трубы, как для повышения эффективности теплообменных аппаратов, так и для расчета непроизводительных потерь тепла в окружающую среду от магистральных трубопроводов и стояков инженерных систем. Ранее было предложено аналитическое решение однородной задачи нестационарной теплопроводности в многослойных объектах со стационарными граничными условиями третьего рода. В данной статье рассмотрены вопросы нестационарной теплопроводности в многослойных объектах. Предложено решение граничной однородной задачи с нестационарными граничными условиями третьего рода. В основу решения положены: метод разделения переменных Фурье по собственным функциям задачи и интеграл Дюамеля. Предложенная формула решения имеет явный вид и благодаря рекуррентной форме записи основных соотношений может быть полезной при многочисленных расчетах.

Ключевые слова: предельная задача; уравнения теплопроводности Фурье; многослойный объект; нестационарные граничные условия третьего рода.

PhD, associate professor Chovniuk Yuriy,
National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine,
Associate Professor Cherednichenko Petro, Assistant Moskvitina Anna,
Kyiv National University of Construction and Architecture

THE USE OF THE METHOD OF SEPARATION OF VARIABLES (FOURIER) FOR SOLVING BOUNDARY PROBLEMS OF UNSTATIONARY HEAT CONDUCTIVITY IN A MULTILAYER MEDIUM

Anticorrosive coating of pipes, precipitation of hardness salts on the walls of pipes in hot water supply systems, heating, refrigeration systems, in coils for charging and discharging heat accumulators, coils of heat exchangers and a multilayer structure of metal-plastic pipes for the heating system and for the floor heating systems is an additional thermal resistance for the transfer of heat from the coolant to the environment. This resistance must be taken into account when calculating heat transfer from the pipe surface, both to increase the efficiency of heat exchangers and to calculate unproductive heat losses to the environment from main pipelines and risers of engineering systems. During the design process, the specialists are faced with the question of how to reduce or increase the heat transfer of 1 m of a steel pipe. To increase, you need to change the infrared radiation up. This is done with paint. Red color enhances heat dissipation. It is better if the paint is matte. Another approach is to install ribs. They are mounted externally. This will increase the heat transfer area. And for a "warm floor" system or a coil immersed in a solid medium (for example, a ground collector of a heat pump or a coil for charging / discharging a heat accumulator with a solid heat storage material), it is necessary to correctly calculate the heat transfer of 1 m of the pipe in order to ensure heating or cooling of this pipe to the required parameters. When do you need to decrease the parameter? The need arises when optimizing a section of the pipeline located outside the residential area, in an unheated volume. Then experts recommend insulating the site - isolating it from the external environment. According to M. Jacob's data, the formulas for heat transfer by thermal conductivity through flat walls can often be applied with sufficient accuracy for cylindrical walls, if the heat transfer surface is taken along the average thickness. Moreover, a large number of practical problems of calculating temperature fields in multilayer objects can be calculated as one-dimensional.

Previously, an analytical solution to the homogeneous problem of non-stationary heat conduction in multilayer objects with stationary boundary conditions of the third kind was proposed. This article discusses the issues of unsteady heat conduction in multilayer objects. A solution to the homogeneous boundary problem with nonstationary boundary conditions of the third kind is proposed. The solution is based on the Fourier variable separation method by the eigenfunctions of the problem and the Duhamel integral. The proposed solution formula has an explicit form and, due to the recurrent form of writing the basic relations, can be useful in numerous calculations.

Key words: boundary value problem; the Fourier heat equation; multi-object; unsteady boundary conditions of the third kind.

REFRENCE:

1. Lyubarets O.P., Moskvitina A.S. Analiz konstruktsiy sezonnykh teploakumulyatoriv dlya zabezpechennya system haryachoho vodopostachannya ta opalennya v kotedzhnomu budivnytstvi //Ventylyatsiya, osvitlennya ta teplohapostachannya. 2015. №18. – S. 61-69. {in Ukrainian}

2. Zhitarenko V.M. Vidnovlyuvani i vtorynni dzherela enerhiyi – Mariupol : PDTU, 2006. – 200 s. {in Ukrainian}

3. Kolobkov P.S. Vykorystannya teplovykh vtorynnykh enerhoresursiv v teplopostachanni – Xarkiv : Osnova, 1991. – 224 s. {in Ukrainian}

4. Efymov A.L. Yssledovanye teploobmena y hydrodynamyky v kanalakh teploobmennykh apparatov slozhnoy heometryy : avtoref. dys. kand. tekhn. nauk / Efymov A.L. – M. : MÉY, 1980. – 20 s. {in Russian}

5. Yakob, M. Voprosy teploperedachy [Tekst] : per. s anhl. / Pod red. V.P. Motulevycha. – M.: Yzd-vo ynostr. lyt., 1960. –518 s. {in Russian}

6. Kreyt F. Osnovy teploperedachy / per. s anhl. F. Kreyt, V. Blék. – M. :Myr, 1983. – 512 s. {in Russian}

7. Danylenko T.K. Vlyyanye teploprovodnosty stenky na protsess teploobmena v kanale // Trudy MVTU, 1974. – № 193. – S. 160 – 165. {in Russian}

8. Korolkov B.P. Spetsyalnye funktsyy dlya yssledovanyya dynamyky nestatsyonarnoho teploobmena – M. : Nauka, 1976. – 168 s. {in Russian}

9. Vendyn S.V. K raschetu nestatsyonarnoy teploprovodnosty v mnohosloynykh obektakh pry hranychnykh uslovyyakh treteho roda. Ynzhenerno-fyzycheskyy zhurnal. 1993 t.65, №2. – S.249-251. {in Russian}

10. Kartashov É.M. Statystycheskye metody v teoryy teploprovodnosty tverdykh tel. – M.: Vysshaya shkola,2001. – 550s. {in Russian}

11. Korn H., Korn T. Spravochnyk po matematyke dlya nauchnykh rabotnykov y ynzhenerov. – M.:Nauka, 1984. – 835s. {in Russian}