

DOI: 10.32347/2076-815x.2020.75.134-146

УДК. 532.517

к.т.н., доцент **Гіжа О.О.**,

gea8@ukr.net, ORCID: 0000-0003-4878-6850,

к.т.н., доцент **Копаниця Ю.Д.**,

a281@ukr.net, ORCID: 0000-0002-9470-1902,

к.т.н., доцент **Нечипор О.М.**,

okschena@ukr.net, ORCID: 0000-0001-8635-2231

Київський національний університет будівництва і архітектури

МОДЕЛЮВАННЯ Й ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РОЗРАХУНКОВОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ ВИЗНАЧЕННЯ ДОВЖИНИ КРИВОЇ ВІЛЬНОЇ ПОВЕРХНІ У ВІДКРИТОМУ РУСЛІ В CAS MAXIMA

Розглянуто розрахунок однієї з класичних задач інженерної гідравліки – побудова кривої вільної поверхні на перепаді та обчислення і графічне відображення результатів розрахунку в системі комп'ютерної алгебри MAXIMA.

Показані основні гідравлічні характеристики, від яких залежить форма кривої. Наведений аналіз диференціального рівняння нерівномірного руху у відкритих руслах при заданих умовах.

Представлений гідравлічний розрахунок довжини кривої спаду над стінкою перепаду при певних параметрах русла і заданих гідравлічних величинах, таких як: витрата, похил, форма і розміри русла, шорсткість, нормальна та критична глибини.

На прикладі типової задачі показано особливості використання мобільної версії пакета CAS MAXIMA, який дозволяє у рамках обмеженого часу розраховувати типовий набір операцій. Розрахунки проводяться практично миттєво. Вивільнюється час на проведення елементів розрахункового експерименту й отримання результатів для різних наборів вихідних даних.

Результати чисельного моделювання у системі CAS MAXIMA дають можливість за одною командою отримати результати розрахунків у графічному вигляді. Співставлення різних графіків в одній системі координат на одному малюнку дозволяє наочно дослідити вплив окремих факторів, допомагає зрозуміти зв'язок математичної культури, інженерних розрахунків й основ символічних розрахунків в системах комп'ютерної алгебри.

Ключові слова: крива вільної поверхні; нормальна і критична глибини; питома енергія перерізу; довжина кривої спаду; комп'ютерна алгебра MAXIMA, чисельний розрахунок.

Сучасні євроінтеграційні процеси, безвізовий режим й академічна мобільність дозволяють талановитій молоді отримати освіту у кращих Вишах Європи. Мобільні Інтернет технології надають миттєвий доступ до відкритої інформації щодо рейтингу вітчизняних й закордонних Вишів, дозволяють безпосередньо оцінити якість освітніх програм. На основі нового стандарту інтернет протоколу (HTML5) розвивається альтернативний напрямок – дистанційні он-лайн курси.

В даній роботі розглядається розрахунок однієї з класичних задач інженерної гідравліки – побудова кривої вільної поверхні у відкритих руслах та обчислення і графічне відображення результатів розрахунку цієї ж задачі в системі комп'ютерної алгебри МАХІМА.

Визначення глибин потоку у відкритих руслах при нерівномірному русі є важливою задачею інженерних розрахунків, з якою зустрічаються при проектуванні гідротехнічних споруд та спряженні рівнів води у верхньому та нижньому б'єфах перепадів, швидкотоків, консольних та шахтних водоскидів, трубчастих перепадів та інш. [1, 2, 6].

Побудова кривих вільної поверхні перед греблею або водозливом є головним завданням нерівномірного руху. При цьому у випадках кривих підпору визначають відмітки підйому рівня води в руслі (річці) та застосовують необхідні заходи проти затоплення територій та споруд на них.

При утворенні кривих спаду в результаті зменшення глибин суттєво зростають швидкості. У цьому випадку треба розрахувати необхідні укріплення русла, що запобігають його розмиванню та руйнуванню самих гідротехнічних споруд. У всіх цих випадках необхідно правильно розрахувати і побудувати криву вільної поверхні потоку – визначити її форму і довжину, тобто фактично отримати залежність $l = f(h)$ при заданих певних умовах: шорсткості каналу або русла, похилі дна, нормальній глибині (глибині рівномірного руху), критичній глибині, формі русла, заданій витраті.

У класичній гідравлічній літературі відомі кілька методів побудови кривих вільної поверхні (методи Павловського, Чарномського, Бахметєва та інші) [2, 3]. Ці методики розрахунку є досить громіздкими і вимагають багато часу.

У даній роботі наводяться порівняльні розрахунки кривої спаду на перепаді за класичним методом М. Чарномського та сучасний метод вирішення цієї ж задачі із застосуванням системи комп'ютерної алгебри Махіма.

Розглянемо визначення довжини кривої у бетонному водовідвідному каналі, в якому встановлено перепад (рис. 1), якщо коефіцієнт закладання укосів $m = 0$, ширина русла по дну $b = 1$ м, витрата $Q = 1,0 \text{ м}^3/\text{с}$, коефіцієнт

шорсткості $n = 0,0017$, похил дна сходини $i = 0,003$, нормальна глибина $h_0 = 0,70$ м, критична глибина $h_k = 0,45$ м.

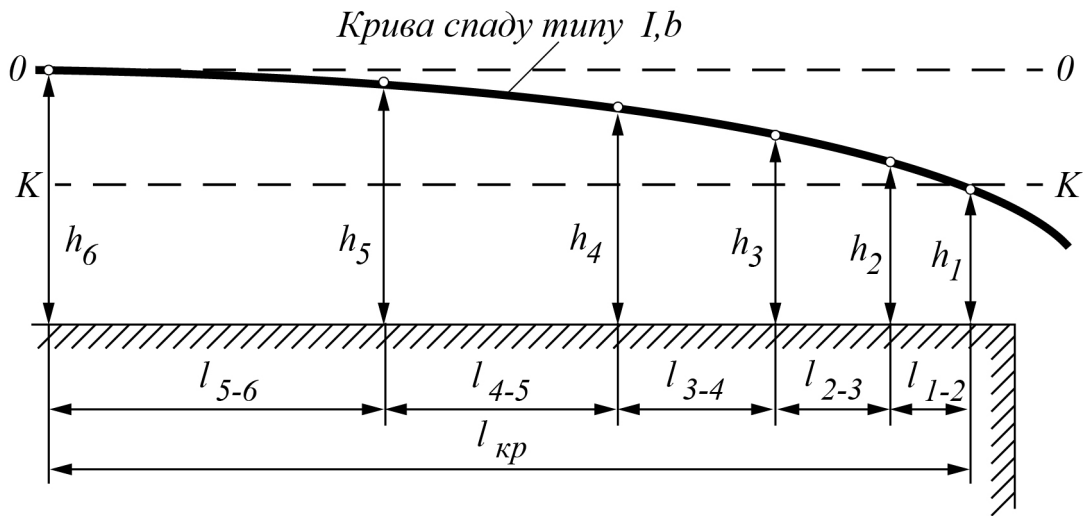


Рис. 1. Побудова кривої спаду у відкритому руслі над стінкою перепаду

Для встановлення форми кривої вільної поверхні перед перепадом попередньо проаналізуємо диференціальне рівняння нерівномірного руху у вигляді [2, 3]

$$\frac{dh}{dl} = i \frac{1 - \frac{K_0^2}{K^2}}{1 - \frac{\alpha Q^2}{g} \cdot \frac{B}{\omega^3}}, \quad (1)$$

де K_0 і K – витратні характеристики відповідно рівномірного та нерівномірного руху;

B і ω – ширина і площа живого перерізу потоку.

При $h_0 > h_k$ ($i < i_k$) в зоні **b** над стінкою падіння перепаду встановлюється опукла крива спаду типу **II b**, що проходить від нормальної глибини h_0 до критичної h_k . Довжину цієї кривої визначимо за методом В.І. Чарномського за формулою

$$l_{1-2} = \frac{\Delta \mathcal{E}}{i - i_{f \text{ сеп.1-2}}} = \frac{\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{i - i_{f \text{ сеп.1-2}}} \quad (2)$$

де \mathcal{E}_1 і \mathcal{E}_2 – питомі енергії у розрахункових перерізах;

$i_{f \text{ сеп.1-2}}$ – середній похил тертя на ділянці 1–2.

За початкову глибину приймаємо $h_{\text{поч.}} = h_1 = h_k = 0,45$ м, за кінцеву – приймаємо глибину, що нескінченно близько підходить до нормальної глибини, тобто $h_{\text{кін.}} = h_6 = 0,69$ м.

Призначаємо розрахункові перерізи з глибинами: $h_1 = 0,45\text{ м}$, $h_2 = 0,48\text{ м}$, $h_3 = 0,52\text{ м}$, $h_4 = 0,58\text{ м}$, $h_5 = 0,62\text{ м}$, $h_6 = 0,69\text{ м}$.

Для зазначених перерізів визначимо основні гідравлічні елементи за формулами:

площа перерізу $\omega = b \cdot h$; змочений периметр $\chi = b + 2h$;

питома енергія перерізу $\mathcal{E} = h + \frac{\alpha Q^2}{2g\omega^2}$;

швидкісна характеристика $W = \frac{1}{n} R^z$;

похил тертя $i = \frac{Q^2}{W^2 \cdot \omega^2}$;

для двох сусідніх перерізів знаходимо $i_{f\text{сеп.}} = \frac{i_{fn} + i_{f(n-1)}}{2}$;

і довжину ділянки $l_{1-2} = \frac{\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1}}{i - i_{f\text{сеп.}(n-1)-n}}$.

Всі розрахунки заносимо у таблицю.

Розрахункові параметри	Одиниця вимірювання	Глибина в перерізі h , м					
		0,45	0,48	0,52	0,58	0,62	0,69
ω	м^2	0,45	0,48	0,52	0,58	0,62	0,69
χ	м	1,9	1,96	2,04	2,16	2,24	2,38
R	м	0,237	0,24	0,25	0,27	0,28	0,29
W (табл.)	$\frac{\text{м}}{\text{с}}$	21,9	22,1	22,75	24,0	24,6	25,2
\mathcal{E}	м	0,727	0,723	0,727	0,747	0,766	0,801
i_f	—	0,0103	0,0089	0,0071	0,0051	0,0043	0,0034
$i_{f\text{сеп.}}$	—	0,0096	0,008	0,0061	0,0047	0,00385	
$i - i_{f\text{сеп.}}$	—	-0,0066	-0,005	-0,0031	-0,0017	-0,00085	
$\mathcal{E}_n - \mathcal{E}_{n-1}$	м	0,004	0,004	0,02	0,019	0,035	
$l_{(n-1)-n}$	м	0,606	0,8	6,45	11,17	41,18	

Загальну довжину кривої спаду знаходимо як суму довжин усіх ділянок:

$$l_{\text{кв}} = l_{1-2} + l_{2-3} + l_{3-4} + l_{4-5} + l_{5-6} = 0,606 + 0,8 + 6,45 + 11,17 + 41,18 = 60,21\text{ м}$$

Далі пропонується розгляд сучасного методу вирішення цієї ж задачі в системі комп'ютерної алгебри МАХІМА.

Для зразка розглянемо приклад всесвітньовідомого курсу Едвардса й Пенні [7]. Курс побудовано на базі розрахунків в системах комп'ютерної алгебри Mathematica, Maple, MATLAB. Наприклад, як зазначено у передмові,

нові технології дозволили об'єм третього видання підручника скоротити у три рази. До видання включили 1900 нових прикладів, 300 машино-генерованих малюнки із загальних об'ємом у 1104 сторінок. Синергетичний вплив високої культури прикладних математичних розрахунків у середовищі відомих систем комп'ютерної алгебри, компактна форма запису команд, розвинений апарат майже миттєвої візуалізації результатів дозволяють будувати сучасні конкурентоздатні навчальні курси.

Враховуючи тренди розвитку сучасних навчальних курсів інженерних дисциплін у провідних Вишах Сполучених штатів Америки й Європи [12-24], представлено приклад використання системи комп'ютерної алгебри CAS MAXIMA [8-11] в навчальному процесі. В даній роботі наведено чисельний розрахунок прикладної задачі визначення довжини кривої вільної поверхні, яку розглядають у гідравлічних та гідротехнічних розрахунках (рис. 2).

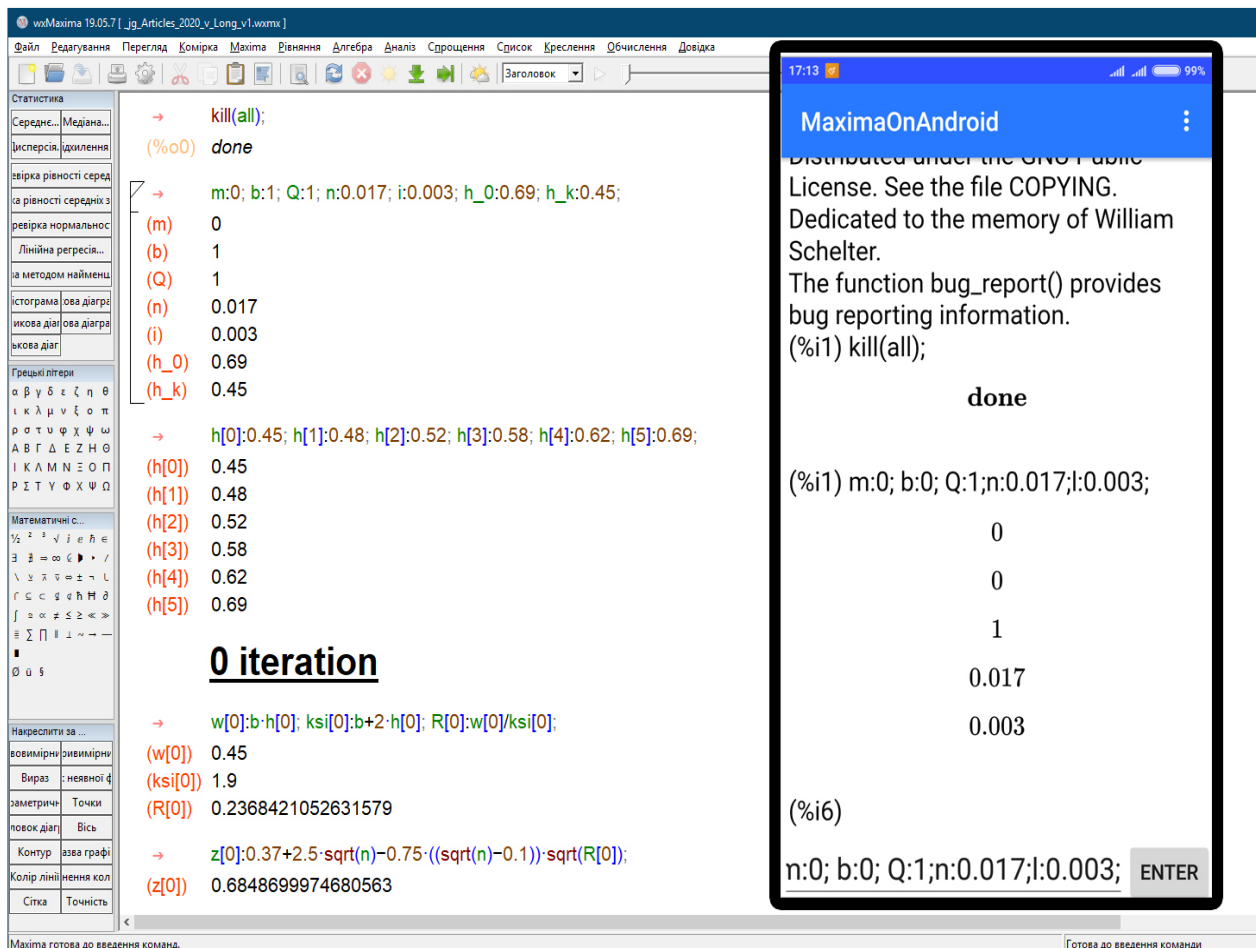


Рис.2. Скріншот екранів єдиного інтерфейсу програми розрахунку у системі CAS MAXIMA на комп'ютері й смартфоні

Представлено особливості використання мобільної версії пакета CAS MAXIMA. Система належить до відкритого програмного фонду,

розповсюджується безкоштовно, має порти для всіх основних операційних систем.

Наявність мобільної версії програми для смартфонів дозволяє розгортати комп'ютерний клас у будь-якій навчальній аудиторії. MAXIMA дозволяє у рамках обмеженого часу практичних занять розраховувати типовий набір операцій, які належать до одної ітерації. Решта розрахунків проводяться практично миттєво. Вивільняється час на проведення елементів розрахункового експерименту й отримання результатів для різних наборів вихідних даних.

Результати чисельного моделювання за одною командою представляємо у графічному вигляді (рис. 3). Графічне відображення різних розрахунків дозволяє наблизитися до розуміння особливостей процесу. Співставлення різних графіків в одній системі координат на одному малюнку дає можливість наочно дослідити вплив окремих факторів. Власноручні розрахунки й візуалізація результатів допомагають студенту отримати унікальний досвід отладки коду програми.

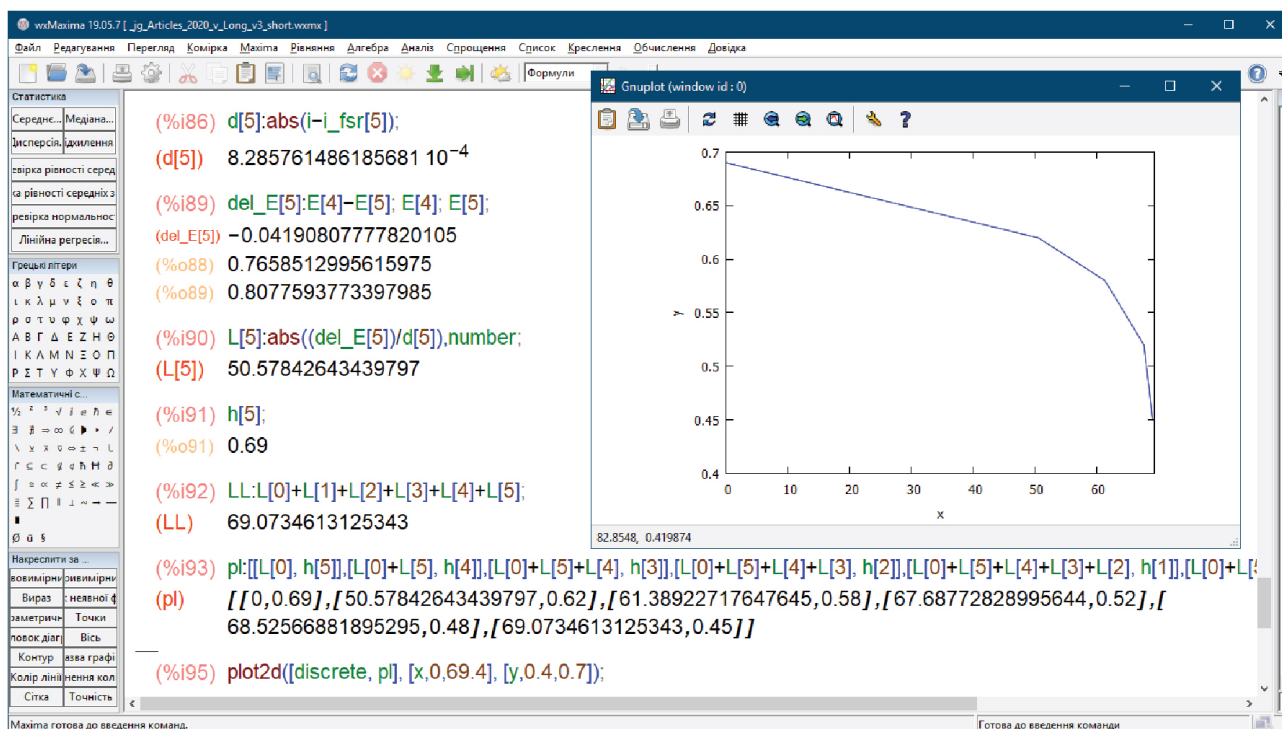


Рис. 3. Скріншот екранів графічної візуалізації результатів розрахунку у системі CAS MAXIMA із прикладами дискретної й експоненціальної апроксимації.

Приклад типового розрахунку представлено у відкритому он-лайн доступі на власному навчальному сайті автора www.k123.com.ua © 2020 Корануцсія У.Д. Представлено декілька варіантів розрахунку й моделювання приведеної навчальної задачі. CAS MAXIMA має розвинену систему експорту

коду програми у формат мережі Інтернет – HTML, TEX. Програмну реалізацію коду ітераційного розрахунку наведено на сторінці <http://h.k123.com.ua /j.html> © 2020 Кораньтсія У.Д.

Введення елементів структур даних – на прикладі вектору – представлено на сторінці:

- вихідні данні <http://h.k123.com.ua /j.html#input> (рис. 1);
- результати розрахунку <http://h.k123.com.ua /j.html#result> (рис. 4).

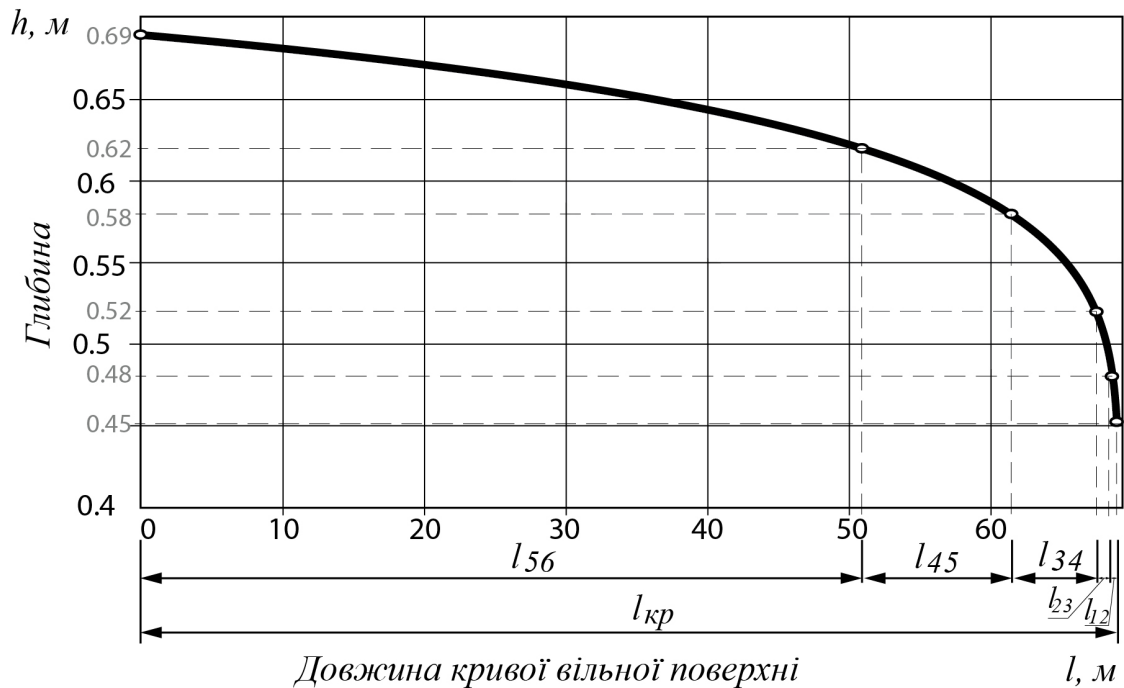


Рис. 4. Результати розрахунку кривої спаду у відкритому руслі в CAS MAXIMA

У такий спосіб ми маємо можливість представляти різні варіанти організації структур даних.

Знайомство із різними варіантами розрахунку на прикладі однієї задачі дозволяє впроваджувати елементи самостійної й творчої роботи студентів. Ми маємо можливість застосовувати елементи проблемного навчання, знайомити студентів із варіантами аналітичного й чисельного розрахунку однієї задачі.

Окрему увагу приділяємо елементам графічної візуалізації результатів розрахунку. На сторінці <http://h.k123.com.ua /j.html#plot> © 2020 Кораньтсія У.Д. представлено варіант візуалізації за результатами окремих ітераційних розрахунків – будування графіків по точках. На рисунках 3, 4 представлено роботу стандартної команди “plot” з опцією “discrete” в системі CAS MAXIMA. Наочний приклад дозволяє за допомогою однієї стандартної команди, виключаючи необхідність використання математичного апарату апроксимації,

підбору та обґрунтування степеня поліному, отримувати графічне відображення результатів розрахунку у масштабі.

Система комп'ютерної математики MAXIMA [8, 9] включає розвинений функціонал підтримки експорту програмного коду у мову гіпертекстової розмітки. Формули зберігаються у форматі міжнародного стандарту представлення математичних робіт – формат TEX. За рахунок використання вищезначених WEB технологій об'єм статті суттєво скорочено. Програмний код типового прикладу представлено для всіх означених у статті варіантів без обмеження у відкритому доступі. У такий спосіб ми представили реалізацію використання конкретного навчального завдання курсу «Інженерної гідравліки» на прикладі технологій поширених у кращих сучасних міжнародних підручниках із інженерних дисциплін.

Математика й інженерія взаємопов'язані [8, 12-24]. На прикладі типового інженерного розрахунку у середовищі CAS MAXIMA представлено зв'язок математичної культури, інженерних розрахунків й основ символічних розрахунків в системах комп'ютерної алгебри. Зростаюча важливість символічних обчислень в сучасній інженерній практиці демонструється на простому прикладі ітераційного розрахунку. Мета прикладу полягає у тому, щоб прояснити базові основи алгоритмів й структур даних для оптимізації й ефективності роботи. Основні поняття надаються студентам за допомогою простого прикладу й наочного графічного відображення результатів виконання розрахунків.

Список використаних джерел:

1. Чоу В.Т. Гидравлика открытых каналов / Пер. с англ. – М.: Стройиздат, 1969. – 462 с.
2. Константинов Ю.М., Гіжа О.О. Інженерна гідравліка. К.: Видавничий дім „Слово”, 2006. – 432 с.
3. Чертоусов М.Д. Гидравлика. Специальный курс. – 4 – е изд. – М., Л.: Госэнергоиздат, 1962. – 678 с.
4. Graf W.H. Hydraulique fluviale: écoulement non permanent et phénomènes de transport, Tom 2, Traité de Génie Civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Presse polytechnique et universitaire romane 1996. – 259 с.
5. Violet P.L., Chabard J.P. Mécanique des fluides appliquée, Presse des ponts et chaussées, ed. 1998.
6. Константинов Ю.М., Гіжа О.О. Особливості гідравлічного стрибка у водобійному колодязі. // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки. – 2007, № 9. – С. 148 – 157.

7. Differential Equations and Boundary Value Problems - C. Henry Edwards - Computing and Modeling 5th Published on Jul 5, 2019 792 p. ISBN-13: 978-0-321-81625-2 (hardcover) ISBN-10: 0-321-81625-0 (hardcover).
8. Maxima, a Computer Algebra System <http://maxima.sourceforge.net/>
9. Maxima [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_(software))
10. [Копаниця Ю.](#) Мультиваріантність розрахунку гідростатичного тиску в системі CAS MAXIMA [Електронний ресурс] / Ю. Копаниця, А. Муляр // [Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія.](#) - 2018. - Вип. 8. - С. 50-51. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/pidteh_2018_8_11
11. [Копаниця Ю.](#) Розрахунок довгих трубопроводів у веб-інтерфейсі системи комп'ютерної алгебри MAXIMA / Ю. Копаниця, С. Наталенко // [Підводні технології. Промислова та цивільна інженерія.](#) - 2018. - Вип. 8. - С. 52-53. - Режим доступу: http://nbuv.gov.ua/UJRN/pidteh_2018_8_12
12. Advanced Engineering Mathematics by Larry Turyn Publisher: CRC Press Year: 2014 ISBN: 9781439834473 (Hardcover) 1429 p
13. An Engineer's Guide to Mathematica by Edward B. Magrab Publisher: Wiley Year: 2014 ISBN: 9781118821268 (Paperback) 431 p.
14. Complex Analysis for Mathematics and Engineering, sixth edition by John H. Mathews, Russell Howell Publisher: Jones & Bartlett Learning Year: 2012 ISBN: 9781449604455 (Hardcover) 645 p.
15. Mathematics for Physical Science and Engineering by Frank E. Harris Publisher: Academic Press Year: 2014 ISBN: 9780128010006 (Hardcover) 768 p.
16. Classical Mechanics with Mathematica, second edition by Antonio Romano, Addolorata Marasco Publisher: Birkhauser Year: 2018 ISBN: 9783319775944 (Hardcover) 644 p.
17. A Math Primer for Engineers by Colin Walker Cryer Publisher: IOS Press Year: 2014 ISBN: 9781614992981 (Hardcover) 494 p.
18. Complex Analysis for Mathematics and Engineering, sixth edition by John H. Mathews, Russell Howell Publisher: Jones & Bartlett Learning Year: 2012 ISBN: 9781449604455 (Hardcover) 645 p.
19. Calculus I, first edition by Tunc Geveci Publisher: Cognella Year: 2011 ISBN: 9781935551423 (Paperback) 538 p.
20. Discovering Mathematics: A Problem-Solving Approach to Mathematical Analysis with Mathematica and Maple by Jir Gregor, Jaroslav Tiser Publisher: Springer Year: 2011 SBN: 9780857290540 (Paperback) 247p
21. Exploring Mathematics with Integrated Spreadsheets in Teacher Education by Sergei Abramovich Publisher: World Scientific Year: 2016 ISBN: 9789814689908 (Paperback) 284 p.

22. Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple by George A. Anastassiou, Iuliana F. Iatan Publisher: Springer Year: 2013 ISBN: 9783642284748 (Hardcover) 580 p.

23. An Introduction to Modern Mathematical Computing with Mathematica by Jonathan Borwein, Matthew P. Skerritt Publisher: Springer Year: 2012 ISBN: 9781461442523 (Hardcover) 224 p.

24. Student's Guide to the Study, Practice, and Tools of Modern Mathematics by Donald Bindner, Martin Erickson Publisher: CRC Press Year: 2011 ISBN: 9781439846063 (Paperback) 260 p.

к.т.н., доцент Гижа Е.А.,
к.т.н., доцент Копаница Ю.Д.,
к.т.н., доцент Нечипор О.М.,

Киевский национальный университет строительства и архитектуры

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РАСЧЕТНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛИНЫ КРИВОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ОТКРЫТОМ РУСЛЕ В CAS MAXIMA

Рассмотрено решение одной из классических задач инженерной гидравлики - построение кривой свободной поверхности на перепаде и вычисление и графическое отображение результатов расчета в системе компьютерной алгебры MAXIMA.

Показаны основные гидравлические характеристики, от которых зависит форма кривой. Приведен анализ дифференциального уравнения неравномерного движения в открытых руслах при заданных условиях.

Представлен гидравлический расчет длины кривой спада над стенкой перепада при определенных параметрах русла и заданных гидравлических величинах, таких как: расход, уклон, форма и размеры русла, шероховатость, нормальная та критическая глубины.

На примере типовой задачи показаны особенности использования мобильной версии пакета CAS MAXIMA, который позволяет в рамках ограниченного времени рассчитывать типовой набор операций. Расчеты проводятся практически мгновенно. Освобождается время на проведение элементов расчетного эксперимента и получение результатов для разных наборов исходных данных.

Результаты численного моделирования в системе CAS MAXIMA дают возможность по одной команде получить результаты расчетов в графическом виде. Сопоставление разных графиков в одной системе координат на одном

рисунок позволяет наглядно исследовать влияние отдельных факторов, помогает понять связь математической культуры, инженерных расчетов и основ символьных расчетов в системах компьютерной алгебры.

Ключевые слова: кривая свободной поверхности, нормальная и критическая глубины, удельная энергия сечения, длина кривой спада, компьютерная алгебра MAXIMA, численный расчет

Ph.D., associate Professor Gizha Olena,
Ph.D., associate Professor Kopanytsia Yurii,
Ph.D., associate Professor Nechypor Oksana,
Kyiv National University of Construction and Architecture

MODELING AND VISUALIZATION OF THE CALCULATION EXPERIMENT OF DETERMINATION OF THE LENGTH OF A CURVE OF A FREE SURFACE IN AN OPEN CHANNEL IN CAS MAXIMA

The calculation of one of the classic problems of engineering hydraulics is considered - the construction of a free surface curve on the difference and the calculation and graphical display of the calculation results in the system of computer algebra MAXIMA.

The basic hydraulic characteristics on which the form of a curve depends are shown. The analysis of the differential equation of non-uniform motion in open channels under given conditions is given.

The hydraulic calculation of the length of the decline curve over the difference wall at certain channel parameters and specified hydraulic values, such as: flow rate, slope, shape and size of the channel, roughness, normal and critical depth.

The example of a typical task shows the features of using the mobile version of the CAS MAXIMA package, which allows for a limited time to calculate a typical set of operations. Calculations are made almost instantly. Free up time for elements of the computational experiment and obtaining results for different sets of source data.

The results of numerical simulation of the CAS MAXIMA system make it possible to obtain the results of calculations in a graphical form with one command. Comparing different graphs in one coordinate system in one figure allows you to clearly explore the influence of individual factors, helps to understand the relationship of mathematical culture, engineering calculations and the basics of symbolic calculations in computer algebra systems.

Keywords: free surface curve; normal and critical depth; specific energy of section; decline curve length.

REFERENCES

1. Chow V.T. Hydraulics of open channels / Per. from English - М.: Stroyizdat, 1969. -- 462 p. {in Russian}
2. Konstantinov Yu.M., Gizha O.O. Hydraulic engineering. К.: Vidavnichy dim "Slovo", 2006. - 432 p. {in Ukrainian}
3. Chertousov M.D. Hydraulics. Special course. - 4th ed. - М., Л.: Gosenergoizdat, 1962. -- 678 p. {in Russian}
4. Graf W.H. Hydraulique fluviale: écoulement non permanent et phénomènes de transport, Tom 2, Traité de Génie Civil, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne, Presse polytechnique et universitaire romane 1996. – 259 c. {in French}
5. Violet P.L., Chabard J.P. Mécanique des fluides appliquée, Presse des ponts et chaussées, ed. 1998. {in French}
6. Konstantinov Yu.M., Gizha O.O. Special features of the hydraulic jump at the water well. // Problems of water supply, water and water management. - 2007, No. 9. - S. 148 - 157. {in Ukrainian}
7. Differential Equations and Boundary Value Problems - C. Henry Edwards - Computing and Modeling 5th Published on Jul 5, 2019 792 p. ISBN-13: 978-0-321-81625-2 (hardcover) ISBN-10: 0-321-81625-0 (hardcover).
8. Maxima, a Computer Algebra System <http://maxima.sourceforge.net/>
9. Maxima [https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_\(software\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Maxima_(software))
10. Kopanitsya Yu. Multivariance of the rosette of a hydrostatic vise in the CAS MAXIMA system [Electronic resource] / Yu. Kopanitsya, A. Mulyar // Pidvodni tehnologii. Promislova and civil engineering. - 2018. - VIP. 8. - S. 50-51. - Access mode: http://nbuv.gov.ua/UJRN/pidteh_2018_8_11 {in Ukrainian}
11. Kopanitsya Yu. Rozrakhunok of the pipelines at the web interface system and computer algebra MAXIMA / Yu. Kopanitsya, S. Natalenko // Pidvodni tehnologii. Promislova and civil engineering. - 2018. - VIP. 8. - S. 52-53. - Access mode: http://nbuv.gov.ua/UJRN/pidteh_2018_8_12. {in Ukrainian}
12. Advanced Engineering Mathematics by Larry Turyn Publisher: CRC Press Year: 2014 ISBN: 9781439834473 (Hardcover) 1429 p. {in English}
13. An Engineer's Guide to Mathematica by Edward B. Magrab Publisher: Wiley Year: 2014 ISBN: 9781118821268 (Paperback) 431 p. {in English}
14. Complex Analysis for Mathematics and Engineering, sixth edition by John H. Mathews, Russell Howell Publisher: Jones & Bartlett Learning Year: 2012 ISBN: 9781449604455 (Hardcover) 645 p. {in English}
15. Mathematics for Physical Science and Engineering by Frank E. Harris Publisher: Academic Press Year: 2014 ISBN: 9780128010006 (Hardcover) 768 p. {in English}

16. Classical Mechanics with Mathematica, second edition by Antonio Romano, Addolorata Marasco Publisher: Birkhauser Year: 2018 ISBN: 9783319775944 (Hardcover) 644 p. {in English}
17. A Math Primer for Engineers by Colin Walker Cryer Publisher: IOS Press Year: 2014 ISBN: 9781614992981 (Hardcover) 494 p. {in English}
18. Complex Analysis for Mathematics and Engineering, sixth edition by John H. Mathews, Russell Howell Publisher: Jones & Bartlett Learning Year: 2012 ISBN: 9781449604455 (Hardcover) 645 p. {in English}
19. Calculus I, first edition by Tunc Geveci Publisher: Cognella Year: 2011 ISBN: 9781935551423 (Paperback) 538 p. {in English}
20. Discovering Mathematics: A Problem-Solving Approach to Mathematical Analysis with Mathematica and Maple by Jir Gregor, Jaroslav Tiser Publisher: Springer Year: 2011 SBN: 9780857290540 (Paperback) 247p {in English}
21. Exploring Mathematics with Integrated Spreadsheets in Teacher Education by Sergei Abramovich Publisher: World Scientific Year: 2016 ISBN: 9789814689908 (Paperback) 284 p. {in English}
22. Intelligent Routines: Solving Mathematical Analysis with Matlab, Mathcad, Mathematica and Maple by George A. Anastassiou, Iuliana F. Iatan Publisher: Springer Year: 2013 ISBN: 9783642284748 (Hardcover) 580 p. {in English}
23. An Introduction to Modern Mathematical Computing with Mathematica by Jonathan Borwein, Matthew P. Skerritt Publisher: Springer Year: 2012 ISBN: 9781461442523 (Hardcover) 224 p. {in English}
24. Student's Guide to the Study, Practice, and Tools of Modern Mathematics by Donald Bindner, Martin Erickson Publisher: CRC Press Year: 2011 ISBN: 9781439846063 (Paperback) 260 p. {in English}.